Conferencia Interamericana de Seguridad Social

Centro Interamericano de Estudios de Seguridad Social

Este documento forma parte de la producción editorial del Centro Interamericano de Estudios de Seguridad Social (CIESS), órgano de docencia, capacitación e investigación de la Conferencia Interamericana de Seguridad Social (CISS)

Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires

Centro Interamericano de Estudios de Seguridad Social

"Propuesta Metodológica de graduación no Paramétrica de Whittaker-Henderson"

Tesis que para obtener el grado de:

Maestría en Gestión Actuarial de la Seguridad Social

Presenta:

Sergio Javier Tamayo Ayala

Buenos Aires, Argentina 2014

AGRADECIMIENTOS

De forma prioritaria, agradezco a Dios que me haya iluminado, entregado las fuerzas necesarias y salud, para la culminación de la presente maestría.

Deseo expresar mi agradecimiento a todos los profesores que dictaron las diferentes cátedras en la Maestría de Gestión Actuarial de la Seguridad Social, Tutores que permitieron una transferencia de conocimientos en las ciencias actuariales, así mismo al Demógrafo M. en C. Alejandro Mina Valdés por su asesoría y dirección en el presente trabajo de tesis.

De manera especial deseo agradecer el decidido apoyo y respaldo incondicional de mi esposa Xenia, quien acompañada de mis amados hijos Javier Edgardo y Blanca Xenia, han sabido comprender los esfuerzos realizados y tiempo dedicado a la Maestría.

A todos, reitero mis agradecimientos.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE CUADROS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

RESUMEN

Para la construcción de tablas actuariales, se aplicó una metodología no paramétrica que considera la secuencia observada de los datos originales de fallecidos y expuestos que intervienen en la estimación de la tasas brutas de mortalidad. Primero, se desarrolló la fórmula original de Wittaker-Henderson Tipo B; posteriormente, se estudiaron los aportes de Howard L. Weinert y Walter B. Lowrie. La fórmula original considera la graduación de los datos originales y es vista como un método de doble objetivo. Por un lado, los resultados de la graduación deben estar cerca de los datos originales (mayor ajuste) y por otra parte, deben presentar patrones de mayor suavizamiento. El propósito es encontrar un balance entre a) la suma al cuadrado de las desviaciones entre los valores observados y los ajustados y b) la suma de las diferencias finitas al cuadrado de los valores ajustados de un orden que se elija, generalmente de orden 2 ó 3. Al final, lo que se busca es una curva ajustada y suavizada lo más cercano posible a los valores originales que permitan explicar las probabilidades de fallecimiento. Sobre la base del estudio realizado, se concluyó que la metodología de Weinert realiza aportes eficientes y prácticos a la metodología original. Al combinar esos métodos se generó un modelo que gradúa la tasa bruta de mortalidad utilizando matrices; adicionalmente, se desarrolló un sistema de ecuaciones que vuelven más eficiente el proceso de graduación y con mayor rigurosidad técnica actuarial. Derivado de ello se concluye que la metodología de graduación de Wittaker-Henderson-Weinert Tipo B, puede aplicarse en El Salvador para los fines de construir tablas actuariales.

PALABRAS CLAVE: Tablas actuariales, no paramétrica, tasa bruta de mortalidad, ajuste, suvizamiento, graduación.

ABSTRACT

In order to create actuarial tables, this paper employs a nonparametric methodology considering the observed sequence of the original data, population and deaths, to create the crude death rate. Firstly, the original Whittaker-Henderson formula Type B Method of Graduation was applied; secondly, the contributions of Howard L. Weinert and Walter B. Lowrie is taken into consideration. The Whittaker-Henderson original formula considers the graduation of the original data and pursues two objectives. On one hand, the graduation results should be close to the original data (better fit) and on the other hand, must provide smoothing patterns. The purpose is to find a balance between a) the sum of the squares of the deviations of graduated values from observed values and b) the sum of the squares of the nth-order finite differences of adjusted values; the order of differences used is usually 2 or 3. Finally, this method aims to a smoothed and adjusted curve fitted as close as possible to the original data allowing to explain the probability of decease. The analysis led to conclude that Weinert methodology enables an efficient and practical contribution to the original methodology. After combining these methods a matrix model for graduating the death rate has been developed; additionally, it has also developed a system of equations that make the graduation process more efficient and incorporate betters actuarial technical skills. As a result, it has concluded that Whittaker-Henderson Type B Method of Graduation could be applied in El Salvador to create actuarial tables.

“TABLAS DE MORTALIDAD. Propuesta metodológica de graduación no paramétrica de Whittaker-Henderson.”

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

Los fenómenos de la vida a que se encuentran sometidas las personas de edad *x* (o cabeza de edad *x*, en terminología actuarial), son cambiantes y generalmente varían en su comportamiento de forma regular; derivado de ello, es importante estudiar y analizar dichos fenómenos los cuales pueden ser trabajados mediante la elaboración de tablas actuariales, las cuales generalmente utilizan en su construcción métodos actuariales de graduación paramétricos o no paramétricos, éstos son métodos que permiten dar una razonabilidad de los comportamientos de los fenómenos de la vida, con el propósito último de resolver las incógnitas de mortalidad que se plantean.

Sobre la base de un enfoque actuarial, el fenómeno a estudiar es el referido a la probabilidad de muerte respecto a la edad, a que es sometida cada persona de un colectivo determinado expuesto al riesgo de fallecer (datos brutos observados no suavizados en ninguna medida); existen diferentes métodos demográficos para recolectar la información de fallecidos y expuestos a ese riesgo natural, los cuales deben procurar una relación entre su precisión, su observancia en un intervalo de registro y la independencia de los individuos; no obstante lo anterior, en los diferentes métodos a utilizar siempre se encontraran con márgenes de errores (por inconsistencias, sesgos o errores correlacionados) que pueden ser propios de la observación en el tiempo realizado, entre los problemas que se observan pueden ser de índole muestral, de medición derivados de omisiones, recolección errónea o mala interpretación o comprensión de los datos estadísticos.

El presente documento pretende mediante evidencia empírica tomada de las estadísticas de la población expuesta al fallecimiento y fallecidos de la población de El Salvador del Censo de 2007, para graduar el fenómeno de mortalidad de la población de país.

En el desarrollo del análisis de la mortalidad de El Salvador, se graduará el fenómeno de mortalidad mediante la revisión de valores observados de una secuencia de datos de expuestos y fallecidos representados en la Tasa Bruta de Mortalidad, el método actuarial de graduación a utilizar es el de Whittaker-Henderson Tipo B, el cual es el elegido para lograr conseguir una curva más suave que refleje las muertes más probables estimadas mediante las verdaderas tasas que realmente prevalecen en la población de El Salvador, es necesario comentar que en los presentes tiempos el método de Whittaker-Henderson Tipo B, ha sido u de las técnicas más utilizadas en investigaciones y manuscritos actuariales.

El procedimiento a utilizar en el presente documento es que una vez cumplimentada la etapa de la recolección de expuestos y fallecidos, se procederá a calcular la Tasa Bruta de Mortalidad, con estos insumos se proseguirá a la graduación de la misma con el propósito de estimar una curva que represente la mortalidad que subyace de acuerdo los criterios utilizados.

La estructura del presente documento se ha desarrollado en cinco capítulos así: se describe la introducción y se hace un breve preámbulo del contenido y desarrollo del tema principal y secundario del documento. En el capítulo dos, se explica la metodología de graduación, el enfoque estadístico, fórmula de Whittaker E.T. Los anteriores sirvieron de base para desarrollar el capítulo tres, éste presenta el tratamiento de las fórmulas de graduación Tipo Ay B de acuerdo a la metodología de Whittaker-Henderson. En el capítulo cuatro una vez realizada la revisión bibliográfica y desarrollo de modelos Tipo B, se aplicó la metodología según Howard L. Weinert y el desarrollo de Lowrie combinado con los estudios de R.C.W. (Bob) Howard. Finalmente se detallan las conclusiones y propuesta metodológica de graduación no paramétrica de Whittaker-Henderson.

1.1 Objetivo general

Presentar una propuesta de metodología de construcción de tablas actuariales, sobre la base sistemática de Whittaker-Henderson Tipo B.

1.1.1 Objetivos específicos

1. Investigar bibliográficamente los diferentes métodos utilizados en la elaboración de tablas de mortalidad, para graduar la Tasa Bruta de Mortalidad.
2. Desarrollar una metodología de graduación de tablas de mortalidad.
3. Graduar los datos de mortalidad para ajustar las tablas de mortalidad a construirse e implementarse, con las funciones Whittaker-Henderson Tipo A y B.
4. Analizar los resultados para observar su aplicabilidad a los colectivos de activos y pensionados por vejez de El Salvador.
5. Realizar una Propuesta a la Superintendencia de Pensiones de una metodología nueva para la elaboración de Tablas de Mortalidad.

1.2 Antecedentes históricos

La estadística ha existido desde el inicio de la civilización, utilizándose representaciones gráficas en diferentes formas para contar a las personas, los animales y recopilar datos de interés. Los babilonios y los egipcios tenían sus propias maneras de recolección y análisis de la información. El presente apartado se ha desarrollado tomando prestados los contenidos de Sepho. South East England Public Health Observatory. Technical Report Calculating Life Expectancy in small areas. Technical Report. Calculating Life Expectancy in small areas.
(http://www.sepho.org.uk/Download/Public/9847/1/Life%20Expectancy%20Nov%2005.pdf)

En los años 594, 2000 y 3000 A.C. ya se realizaban análisis de datos de la población como censos en Israel, Tribus Judías, China y los griegos, para diferentes usos.

Es así como la recopilación de datos era importante en las diferentes décadas de la historia, incluyendo a la iglesia; tenemos que el imperio Romano fue el primer gobierno que recopiló datos sobre la población, superficie y renta; además, se ordenaron estudios de las propiedades de la iglesia en los años 758 y 762.

Históricamente los primeros textos relacionados con la Teoría de la Probabilidad y por ende las primeras tablas de mortalidad aparecieron en la segunda mitad del siglo XVII, así como las funciones de supervivencia y las leyes de mortalidad subyacentes.

La esperanza de vida fue una de las primeras medidas de la mortalidad, las muertes se registraron por primera vez en Inglaterra en 1603.

El famoso astrónomo inglés Edmund Halley, giró su trabajo sobre la probabilidad de la esperanza de vida, que se derivan de las tablas de mortalidad, estimó que la mitad de los nacidos han muerto a los diecisiete años, siendo 1,238 en ese tiempo, y la cifra se ha reducido a 616; produjo la primera tabla de vida a finales del siglo XVII.

John Graunt, un comerciante de Londres, tomó un gran interés en la mortalidad y en 1662 publicó sus observaciones sobre los cálculos de la mortalidad. En su prefacio Graunt hizo la observación de que las personas que recogían los cálculos semanales sobre la mortalidad hacían poco uso de ellos.

Sin embargo, la curiosidad de Graunt fue despertada y se examinaron los cálculos, de manera de tener una visión de todo el conjunto, y comparar de un año, una ciudad con otra con respecto a todos los entierros y bautismos, y de todas las enfermedades y las muertes que ocurren en cada uno de ellos, respectivamente. A partir de estas observaciones Graunt elabora las tablas de mortalidad.

En 1691, en Breslau, Alemania, un estudio sobre la tasa de mortalidad se utilizó para la primera tabla de mortalidad por el astrónomo inglés Edmund Halley; el trabajo de Halley inspiró importantes esfuerzos para calcular expectativas de vida en Europa. Sin embargo, las tablas de Halley tomaron tiempo para que el gobierno y las compañías aseguradoras las utilizaran en sus cálculos.

La siguiente persona que hizo una contribución significativa para el análisis de datos de mortalidad fue Benjamín Gompertz. En 1825 mostró que las tasas de mortalidad específicas por edad aumentan en progresión geométrica, así que cuando las tasas de mortalidad se representan en una escala logarítmica resultará en una línea recta, conocida como Ley de Gompertz de Mortalidad.

Tras la publicación del censo de 1831, Thomas Edmonds produjo tasas de mortalidad específicas por edad como un indicador de la salud general. Él construyó tablas utilizando la ley de la mortalidad para cada condado de Inglaterra.

En 1839 William Farr, el Secretario del Registro Civil de Nacimientos, Defunciones y Matrimonios, publicó el primer cuadro Inglés de vida nacional, utilizando únicamente los nacimientos y las defunciones registradas, ya que, en opinión de William Farr, las cifras del censo en ese momento no eran fiables.

Estas tablas de vida están siendo publicadas por el Departamento del Actuario del Gobierno. Farr también utilizó las cifras de esperanza de vida para las áreas regionales para acentuar las desigualdades en salud entre las diferentes áreas y grupos profesionales.

William Makeham (1867) modificó la función de Gompertz mediante la adición de un parámetro de tiempo independiente para representar el efecto de sucesos casuales ambientales correlacionados con la edad, que aumenta el riesgo de mortalidad.

Durante el siglo XIX el uso de tablas de vida se extendió a otros países europeos, en particular Escandinavia.

En los Estados Unidos las tablas de mortalidad oficiales completas se produjo por primera vez en 1900-1902 en relación con su censo de población de cada diez años.

En 1945, los EE.UU. iniciaron una serie de tablas de vida abreviadas anuales, con base en registros de mortalidad anuales y estimaciones postcensales de población, que se ha mantenido hasta la actualidad.

La proliferación del uso de tablas de vida a otros países se ha visto obstaculizado por la disponibilidad de buena calidad de datos de registro de eventos y estimaciones fiables de sus poblaciones.

En 1968, Keyfitz y Flieger publicó una compilación de las tablas de vida para un gran número de países en los que los datos oficiales eran de calidad satisfactoria; sin embargo, sólo cubría el 29 por ciento de la población mundial, principalmente en Europa y América del Norte, con poca representación de países en desarrollo.

En 1981 las Naciones Unidas publicaron un conjunto de tablas de vida explícitamente para su uso en países en desarrollo y desde 1999 la OMS ha construido tablas anuales de vida para todos los Estados miembros, utilizando una versión modificada del modelo Brass y teniendo especialmente en cuenta el efecto del VIH / SIDA en el patrón de mortalidad.

Actualmente, las estadísticas son un método seguro para representar con precisión datos económicos, políticos, sociales, psicológicos, biológicos y físicos; y para relacionarlos entre sí; siendo relevante la interpretación de los datos.

La teoría de la probabilidad ha incrementado el alcance de las aplicaciones estadísticas, siendo ésta muy útil para la fiabilidad de las inferencias estadísticas, etc.

1.3 Tabla actuarial

Una tabla actuarial comúnmente llamadas "de Mortalidad", por ser este el riesgo intuitivamente más inmediato, se le adjudica también el nombre tabla de vida. Una tabla actuarial, contiene los elementos básicos (funciones y probabilidades) que permiten calcular las probabilidades de muerte y supervivencia en una población homogénea, a partir de las cuales se llevan a cabo los cálculos actuariales, para su elaboración es necesario disponer de información estadística sobre la población (Expuestos) en estudio, en su estructura por género y edades puntuales, y sobre los Fallecidos, ambas poblaciones con idéntica clasificación y referidos a un mismo periodo de tiempo. Y como conclusión preliminar es que, el propósito de las tablas actuariales es medir la incidencia de mortalidad en la población objeto de estudio.

Un aspecto importante a considerar es la diferencia que existe entre una tabla de mortalidad y lo que se conoce como tabla de supervivencia; la primera, es una recopilación de valores del número de fallecidos que a cada edad x se han verificado entre un grupo de partícipes, que tienen todos una edad inicial preestablecida, de ordinario la edad 0; en cambio, una tabla de supervivencia es, a su vez, la recolección de valores de los números de supervivientes a cada edad x entre un grupo de individuos que tienen todos una edad fija. Así, de una tabla de supervivencia se obtiene inmediatamente una de mortalidad, derivado de que el número de fallecimientos de personas de x años de edad, viene dado a partir de los supervivientes a las edades x y $x+1$.

Las tablas actuariales son modelos de cálculo en los cuales se plasman las probabilidades que tiene una generación o cohorte de individuos de "fallar" ante eventos como el fallecimiento, la invalidez, el desempleo, la nupcialidad, entre otros, atendiendo además a la edad de la persona, a su relación de edad con otra y un aspecto importante, su género.

En la mayoría de la literatura revisada, se conoce y se define como tablas de mortalidad; en el presente documento, se referirá a las tablas de mortalidad con el nombre de "Tablas Actuariales"; no obstante lo anterior. Existen tablas de momentos que constituyen un estudio transversal de la mortalidad, ya que se basan en la información ficticia (Generalmente de 10K partícipes) de una generación en un momento t, sometiendo a cada edad simple o grupo de edad a las condiciones reales observadas en distintas cohortes durante un cierto periodo de estudio. Estas tablas actuariales, suponen que el proceso de extinción del grupo ficticio obedece a las condiciones de mortalidad que experimenta una cierta población en un momento dado y que la mortalidad de las distintas generaciones no varía en el tiempo, o sea, que la mortalidad a la que va a estar expuesta la generación ficticia hasta su extinción es constante. Así el proceso se explica a la extinción de los partícipes hasta la desaparición del último integrante en un período dado. La forma más sencilla de elaborarse es a partir de tasas de mortalidad específicas por edad y los resultados se usan para medir la mortalidad, sobrevivencia y esperanza de vida.

Una de las ventajas es: No refleja los efectos de la distribución de la población por edad y no requiere del uso de una población estándar para comparar los niveles de mortalidad de diferentes poblaciones.

Hay dos tipos de tabla de mortalidad:

- De cohorte:
- Actuarial: se utiliza la experiencia de mortalidad de una población durante un año determinado, que se aplica a una cohorte ficticia de 100,000 nacidos vivos o en general de 10K sujetos. Es una herramienta muy útil para comparar datos de mortalidad a nivel internacional y para valorar las tendencias de mortalidad a nivel nacional.

Limitaciones de la tabla actuarial

- Los datos pueden ser incompletos o sesgados, por ser una medida basada en censos de población y registros vitales.
- Las variables como: la mortalidad infantil; el procedimiento elegido para cerrar el intervalo abierto final de la tabla y de los errores de información que subyacen en dichos intervalos (85 y más; 90 y más por ejemplo); diferencias importantes entre grupos específicos de edad; tendrían un efecto limitado en la esperanza de vida.

Características de la tabla de mortalidad

- Describen el comportamiento de la mortalidad por edades y hace comparaciones por género.
- Se obtienen probabilidades de mortalidad para análisis de diferentes análisis demográficos; que son más apropiadas que las tasas de mortalidad (mx).
- Calcula la esperanza de vida para las diferentes edades o grupos de edad y género.
- Puede utilizarse en el modelo teórico de población (población estacionaria).
- Puede efectuar diversas aplicaciones en variedad de problemas en el ámbito de los seguros de personas.

En vista de la disponibilidad y calidad de información estadística de Expuestos y Fallecidos del Sistema de Ahorro para Pensiones, la metodología de elaboración de tablas actuariales, en su construcción se realizará sobre un enfoque de tablas generales, la cual observa las condiciones reales de Expuestos y Fallecidos de la población censada de El Salvador a

2007 derivada del VI Censo de Población V de Vivienda 2007. En país, labor de los censos corresponde a la Dirección General de Estadísticas y Censos (DIGESTYC), que es la instancia encargada de la elaboración de los censos nacionales y las encuestas con diferentes propósitos.

No obstante lo anterior, un objetivo original de investigación fue el de revisar las tablas ES RV vigentes, con el propósito de corroborar si las probabilidades de sobrevivencia de este modelo son las adecuadas, pues de estar sobreestimadas o subestimadas estarían brindando una sobreprotección o lo contrario al sistema de pensiones con montos de pensiones de los que podrían considerarse técnicamente viables. De hecho, a la fecha, quince años después de la entrada en operaciones del Sistema de Ahorro para Pensiones en El Salvador, no se había contado con ninguna comprobación empírica sobre la base de un enfoque no paramétrico de que las tablas ES RV sean representativas del fenómeno de la mortalidad de los afiliados. Las actuales tablas actuariales que utiliza el sistema de pensiones, es un modelo que fue construido con información estadística nacional ajustada sobre una base combinada de tabla – Group Annuity Mortality 1971 (GAM71) – que suele ser usada en los productos de seguros privados y además se utilizó la experiencia chilena.

Para el desarrollo de todo el trabajo, en la notación que se ha utilizado, no hay literales de género de la población, debido a que los conceptos se aplican en igualdad de condiciones para hombres y mujeres. Al final se construirán dos tablas sobre la base del enfoque Whittaker-Henderson debido a que la mortalidad es desigual en hombres y mujeres.

1.4 Marco teórico preliminar

López et al (1996) [i], en sus estudios han determinado que en la teoría de la supervivencia existe la innegable certeza de que la persona ha de fallecer, aunque se ignora el momento en que tal hecho haya de producirse, precisamente en esa indeterminación del momento aparecen dos conceptos estrechamente relacionados, que son la "edad" (tiempo biométrico) con que la persona fallecerá, y el segundo "el tiempo físico" en que acaecerá el fallecimiento, en todo caso y para efectos del presente documento el dato relevante, será la edad con la que se sobrevive, o alternativamente, se muere un persona; y, no el momento en que tal hecho de supervivencia o fallecimiento se produce.

Es habitual y aceptado por la literatura actuarial que la mortalidad evoluciona a lo largo del tiempo y que la probabilidad de que una persona en concreto fallezca en un determinado período, es una contingencia (fallecer) y depende de muchos factores, como: su edad, género, estado de salud, factores genéticos, raza, entre otros.

En la mortalidad el efecto que es más evidente, es la edad (salvo en los casos de las edades de los infantes), en sí, la mortalidad aumenta con la edad, otro factor es el género, la mortalidad femenina en promedio es menor a la mortalidad de los hombres, claro dejando constante los demás factores. La mortalidad puede acentuarse en estados poco recurrentes, ante la aparición de enfermedades graves, pandemias, etc.

En general, las tablas actuariales son un conjunto de valores ordenados por edad y género, en las que se incluyen valores referidos a la previsible evolución del colectivo en función de un tipo de evento determinado.

Dependiendo del tipo de evento que afecta a un colectivo, estas tablas actuariales podrán ser de mortalidad, incidencia de invalidez, rotación, etc. Existen tablas más específicas y aplicables a colectivos concretos y para causas de salida definidas, como serían las tablas actuariales de invalidez permanente total, permanente absoluta, de mortalidad de inválidos, etc.

La lógica actuarial indica que las tablas actuariales deben cumplir una serie de requisitos, entre los principales se encuentran: Han de estar basadas en la experiencia nacional o extranjera, adaptada a los tratamientos estadísticos actuariales generalmente aceptados; para observaciones de periodos específicos, el fin del periodo comprendido debe ser reciente, por ejemplo, estar basado en los últimos 20 años. Si se dispone de un numeroso colectivo y una gran cantidad de datos históricos disponibles sobre salida del colectivo por distintas causas, se pueden realizar unas tablas actuariales basadas en la propia experiencia, en la cual la información estadística deberá cumplir unos requisitos de homogeneidad y representatividad del riesgo, incluyendo la suficiente información como para que se permita la inferencia estadística.

En la mayoría de los casos se consideran tablas de mortalidad de momentos, que no es más que un estudio transversal de la mortalidad, ya que se basan en la información ficticia de una generación en un momento t, sometiendo a cada edad simple o grupo de edad a las condiciones reales observadas en distintas cohortes durante un cierto periodo de estudio. Estas tablas suponen que el proceso de extinción del grupo ficticio obedece a las condiciones de mortalidad que experimenta un cierto colectivo en un momento dado y que la mortalidad de las distintas generaciones no varía en el tiempo, o sea, que la mortalidad a la que va a estar expuesta la generación ficticia hasta su extinción es constante.

En otro contexto, la ciencia actuarial instruye además la construcción de tablas actuariales generales, mediante la observación de las condiciones reales de mortalidad de la población objeto de estudio durante cierto lapso (la experiencia de la tabla), esto implica la obtención de datos estadísticos contenidos en los censos, encuestas de muestreo y registros de estadísticas vitales a nivel nacional. En este sentido, se pueden elaborar tablas actuariales para la población general de un país, sobre la base de esa línea de trabajo se utilizan normalmente los datos facilitados generalmente por las instituciones de Estadística y Censos, esas entidades a la vez son las encargadas de elaborar las estadísticas de nacimientos, defunciones y los censos de población. Un aspecto a considerar es que, cuando las tablas actuariales se refieran a la fecha de referencia de los censos, se considera necesario utilizar las proyecciones de poblaciones elaboradas a partir de los mismos para disponer de las estructuras por género y edad en el momento de referencia.

En lo que respecta a los sistemas previsionales los cálculos actuariales en donde interviene el uso de tablas actuariales, se realizan en el momento presente basándose en datos pasados, para la estimación futura de unas prestaciones o aportaciones, pudiéndose quedar desfasada la tabla obtenida con los datos basados en la experiencia.

Es importante considerar que en evolución de la supervivencia en el planteamiento financiero-actuarial de los sistemas de pensiones, utilizando correcciones ya sea aplicando tablas proyectadas o aplicando en su defecto tipos de interés técnico moderados, que prevean la desviación futura que, sin duda alguna, afectará negativamente al coste de la operación, por ejemplo con unas cuotas insuficientes debido a la aplicación de tablas actuariales basadas en la experiencia pasada obsoleta.

Sin embargo, cuando se habla de utilizar tablas de mortalidad en el cálculo de por ejemplo pensiones, no puede eludirse el hecho de que los afiliados a un sistema previsional posee características propias, sobre todo ante la estructura del nivel de empleo, permanencia en la actividad económica y los niveles de cobertura previsional de un país determinado; por lo que, constituyen un colectivo con características diferentes de las del resto de la sociedad, debido a que son sujetos que están con distintas condiciones de vida y lugares de trabajo, salud, distinto nivel cultural, distinta exposición a riesgos y distinta composición del grupo familiar.

1.5 Funciones y probabilidades básicas

Una tabla actuarial *representativa* puede considerar la siguiente estructura en columnas: Edades simples en valores enteros x, probabilidades de que los personas en x, fallezcan antes de cumplir un año q_x, a partir de esas variables se pueden obtener el número de muertos y vivos a una edad x, generalmente la última columna de una Tabla de Mortalidad típica se le conoce como la esperanza de vida e_x.

Antes de comenzar el presente apartado de tabla actuarial, es conveniente establecer la nomenclatura típica y comúnmente empleada en este contexto:

Edad alcanzada: x

Por definición esta es la primera columna de una tabla actuarial, la edad alcanzada x, representa las edades de las personas, que únicamente consideran valores enteros (discretos), $x = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots \omega$

Probabilidad de Muerte: q_x

Generalmente q_x ocupa la segunda columna de la tabla actuarial y representa las probabilidades de que las personas de edades $\mathrm{x} = 0, 1, 2, 3, \dots ..$ objeto de estudio mueran antes de alcanzar una edad siguiente; en otros términos q_x es la probabilidad de que un individuo que haya alcanzado la edad x y que acaba de cumplirla, y no alcance la edad $x + 1$, por haber fallecido en el transcurso del año.

q_x, es la probabilidad objetivo de graduación, ya que como veremos en la elaboración de una tabla actuarial es la función que se ve sometida a estudio, por lo tanto es la probabilidad de difícil estimación, una vez conocidos los valores q_x se pueden calcular sin mayor dificultad las demás probabilidades y funciones básicas, en este punto, una tabla actuarial nos proporciona una distribución de probabilidad del número de años completos de vida hasta la muerte de una persona de edad q_x.

La probabilidad de q_x, es la complementaria de p_x, reflejada en la siguiente expresión:

$$q_x = 1 - p_x$$

$$= 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

Generalmente, para simplificar los cálculos actuariales o de graduación, se considera que las muertes de los partícipes de cada generación se distribuyen uniformemente a lo largo del año; además, es pertinente comentar la observación de que toda probabilidad anual de muerte, ésta varía con la edad, pero es constante para una misma edad, hipótesis aceptable excepto en las edades límites de la vida.

Función de Sobrevivencia: l_x

Una vez especificado el colectivo que se quiere observar, la función de sobrevivencia: l_x representa el número de personas pertenecientes al colectivo que han alcanzado la edad x. En otras palabras, l_x es el número de personas vivas (considerando un grupo inicial dado) que tienen exactamente x años de edad.

Estadísticamente l_x, es considerada como una función básicamente decreciente que considerando su evolución en el tiempo, tiende a disminuir por los decesos naturales de los partícipes que fallecen.

Función de Defunciones: d_x

Número de personas que debido al fallecimiento abandona un colectivo después de cumplir la edad x y representa el número de personas que fallecen entre las edades x y $x+1$.

Tenemos que:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Los partícipes de un colectivo en una línea del tiempo van falleciendo en los años subsiguientes hasta la edad límite de la tabla actuarial ω, (en esa edad ya no queda ningún superviviente), llegado a este límite se da una extinción total del colectivo; en este punto, se obtiene que el número de partícipes l_x que iniciaron a una edad determinada se puede representar como:

$$l_x = \sum_{t=0}^{t=w-1-x} d_{x+1}$$

Al llegar a la extinción total se tiene que $l_\omega = 0$.

Probabilidad de Sobrevivencia: p_x

Es la probabilidad de que una persona de edad x y que acaba de cumplirla, alcance la edad de $x+1$, es decir que viva por lo menos un año más. Dicha probabilidad, se define, siendo x la variable aleatoria representativa de la edad de muerte, así su expresión sería: $P_x = P(X \geq x+1/X \geq x)$, es decir, es una probabilidad condicionada de que un partícipe encontrándose vivo a la edad x continúe en el mismo estado a la edad de $x+1$. En la práctica un partícipe puede verse afectado única y exclusivamente por uno de dos siguientes sucesos: fallecer antes de cumplir la edad $x+1$, o sobrevivir y cumplir la edad $x+1$. De acuerdo al cálculo de probabilidades se puede expresar lo siguiente:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Pueden establecerse unas frecuencias, resultando de comparar el número de personas que alcanzan la edad x+1, con el de personas de edad x. Esta frecuencia con respecto al suceso "sobrevivir un año más una persona de edad x", se presenta con referencia a la observación estadística como el cociente de dividir el número de casos favorables l_{x+1}, entre el número de casos posibles, nos lleva a interpretar este cociente como la probabilidad de supervivencia al cabo de un año de una persona de edad x.

De forma análoga se establecería la frecuencia al comparar el número de personas que fallecen de edad x, respecto de los que tienen esa edad.

Función de Interés v:

Es una expresión financiera, se trata de una progresión decreciente de razón menor que la unidad (pero positiva: $v \geq 0$), en resumen v es la variable financiera de las tablas de mortalidad.

$$v^t = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-t}$$

Es un parámetro de difícil estimación e importante a la vez, ya que es utilizado para encontrar el valor presente de las prestaciones prometidas, puede ser constante pero debe revisarse continuamente para cambiarlo, su variación dependerá de las circunstancias económicas que ocurran, generalmente este tipo de interés se considera como representante las ganancias y rendimientos esperados en la evolución económica-financiera futura.

Funciones Conmutadas: D_x y N_x

Las llamadas Funciones Conmutadas se pueden construir sustituyendo valores obtenidos directamente de las tablas actuariales, de acuerdo al siguiente detalle:

$$D_x = v^x l_x$$

$$N_x = \sum D_x$$

Esperanza de vida e_x

Generalmente es la última columna de la tabla actuarial y representa, la esperanza de vida a las distintas edades.

Se expresa así, la esperanza de vida a la edad x:

$$e_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_x} \sum_{i=x+1}^{\omega} l_i$$

Llegado a este punto se puede establecer que una tabla de actuarial, es una colección de valores del número de fallecimiento que a cada edad se han verificado entre un grupo de personas que tienen todos una edad inicial preestablecida, de conocido la edad 0. Este es el punto diferenciador entre la matemática financiera determinista y la matemática actuarial, en si una tabla de actuarial no se construyen observando un colectivo como por ejemplo una cifra dada de recién nacidos, ejemplo 1,000,000 (radix) hasta que todos hayan fenecido, sino más bien, el análisis se realiza sobre la base en las probabilidades de fallecimiento para cada edad, derivadas de la experiencia de una población en períodos cercanos a censos por ejemplo, y, en hipótesis de que las probabilidades derivadas de la tabla actuarial son apropiadas para la vida de aquellos que pertenecen al grupo de supervivientes.

Generalmente, cuando se estudia una Tabla Actuarial, a ésta se le adjudican o califican con otros títulos como: Tablas de Mortalidad, Tablas de Vida, Tablas de Sobrevivencia; no obstante, los datos que sirven para el cálculo de las probabilidades de vida y muerte, están agrupados y reunidos en cuadros denominados Tabla de Supervivencia (Life Table), que para los habla hispanos se les denomina Tabla de Mortalidad, la cual está diseñada con posibles valores enteros de x, que dependiendo de los colectivos de estudio, la tabla comienza en 0 y termina en ω, en dichas tablas, las funciones básicas como: l_x (l de *living, vivos*) que es el número esperado de supervivientes a la edad de x de l_0 recién nacidos a la edad cero, d_x (d de *dead*) número esperado de fallecidos entre las edades de x y $x+n$, y q_x (probabilidad de fallecimiento).

En el proceso de eliminación de personas de un colectivo, es más evidente que la eliminación suceda con las frecuencias relativas de muerte, por lo que se adopta el supuesto de dichas frecuencias son exactamente iguales a las probabilidades de q_x, que se define como se había hecho anteriormente:

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{lx}$$

A partir de la ecuación anterior, es factible y sencillo derivar las otras funciones básicas, como:

$$d_x = l_x * q_x$$

En las tablas suelen venir también los valores de q_x, tanto anual de mortalidad y p_x tanto anual de supervivencia.

Refiriéndonos a q_x, ya que como sabemos $p_x = 1 - q_x$ haciendo la observación de que toda probabilidad anual de muerte varía con la edad, desde luego, pero era constante para una misma edad, debido a que prácticamente lo son los valores de la frecuencia. Existen otros valores importantes como la función de la esperanza de vida e_x. La esperanza de vida para una persona x, corresponde al número promedio de años que le restaría vivir a un miembro de un colectivo. Generalmente su valor se obtiene de la razón entre el número de años que le resta vivir a la generación completa a partir de la edad "$\boldsymbol{x}$" entre el número de sobrevivientes a esta edad.

1.6 Tablas de Mortalidad En El Salvador en el Sistema de Ahorro para Pensiones

Con la reforma al Sistema de Pensiones de El Salvador, la Superintendencia de Pensiones en el año 1996 contrató una consultoría con el propósito de que se desarrollarán tablas actuariales que explicaran la mortalidad del colectivo afiliado a los Sistemas de Ahorro para Pensiones y el de Pensiones Público, a la fecha (2013), quince años después de la entrada en operaciones del Sistema de Ahorro para Pensiones y no obstante que se han realizado consultorías para cambiar las actuales tablas de mortalidad, a la fecha siguen vigentes las tablas que se aprobaron en el año 1998.

Los motivos de la obsolescencia de las tablas de mortalidad podrán ser diversos, el problema es que a más de una década, El Salvador no cuenta con un estudio de comprobación empírica de que las tablas ES RV vigentes, sean representativas del fenómeno de la mortalidad de los afiliados a los sistemas de pensiones y tampoco se han aprobado reformas a la normativa vigente que regula las tablas actuariales.

El modelo de tablas actuariales fue construido a partir de 1996 y fue aprobado en 1998 por parte de la Superintendencia de Pensiones, la información que sirvió de base fue la estadística nacional ajustada sobre una base combinada de RV-85, MI-85 y B-85 (construidas en 1985 para un colectivo de la sociedad chilena). Derivado de ello, se han planteado serias dudas mediante evidencias, ya que, los indicadores de las tablas nacionales publicadas por la Dirección General de Estadística y Censos (DIGESTYC) de El Salvador, acusan en términos generales una mortalidad más aguda que la de las tablas del Instructivo SAP 29/98. El otro aspecto importante es la Tasa de Interés Técnico que es de 6.0%, al cierre de 2010 el fondo de pensiones ha sido gestionado únicamente por dos administradoras en los últimos años, dicho fondo ha generado rentabilidades por montos menores al 6%, por lo que resulta necesario y crítico revisar esta tasa, por los resultados obtenidos en el cálculo de las prestaciones en el Sistema de Ahorro para Pensiones y los sesgos en las proyecciones de las valuaciones actuariales; la tasa de interés técnico (o tasa de descuento), es sin duda y sobre la base de una perspectiva actuarial, una de las variables más sensibles para el desarrollo de los Sistemas Previsionales, ya que dicha tasa de descuento o tasa de interés técnico, representa la apreciación sobre el valor de una masa de dinero en el tiempo.

Los lineamientos jurídicos de las tablas actuariales, están aprobados por la Superintendencia Ajunta de Pensiones de El Salvador y las disposiciones están contenidas en el Instructivo No. SAP - 29/98: “Instructivo para la Determinación de los Capitales Técnicos Necesarios y Generación de Tablas de Mortalidad”, donde se consignan las tablas de mortalidad que deben aplicarse para determinar los capitales técnicos necesarios (CTN) para una unidad de pensión y la tasa de interés técnico que debe utilizarse para la generación de las tablas de mortalidad que es del 6%.

Las tablas actuariales vigentes en El Salvador utilizan fórmulas para determinar los CTN, y han sido expresadas en términos de las funciones conmutativas, siendo necesaria la utilización de funciones analíticas que permitan generar las tablas de mortalidad.

Las funciones analíticas se presentan en función de q_x que corresponde a la probabilidad de que una persona de edad x fallezca dentro de un año, es decir:

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \quad \Rightarrow \quad q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

Donde:
q_x: Es la probabilidad de que la persona fallezca a la edad x
l_x: Es el número de personas vivas a la edad x
l_{x+1}: Es el número de personas vivas a la edad $x+1$
d_x: Es el número de personas muertas a la edad x

La función matemática que se utiliza para la generación de los valores q_x en tablas de mortalidad las cuales se han ajustado con el método de Gompertz-Makeham, se expresa de la siguiente forma:

$$q_x = 1 - s \times g^{c^x (c-1)}$$

Para todas las tablas RV ES cuando la edad sea 110 años, la q_x será igual a 1.

La normativa considera seis tablas de conformidad al siguiente detalle:

Tablas RV H-M ES:	Para el colectivo de activos y pensionados por vejez Hombres (H) y Mujeres (M)
Tablas BH-M ES:	Para el colectivo de beneficiarios hombres (H) y mujeres (M)
Tablas MI H-M ES:	Para el colectivo de fallecidos inválidos hombres (H) y mujeres (M)

Las tablas vigentes y los parámetros necesarios para la generación de las tablas de mortalidad se anexan al final del presente documento, las tablas que aplican actualmente para Afiliados Activos y Pensionados en el Sistema de Ahorro para Pensiones. (Anexo No. 1).

En el Sistema de Ahorro para Pensiones, una pensión por vejez o invalidez o sobrevivencia, son arreglos de pagos periódico, de forma de una anualidad financiera, que involucra la peculiaridad de que el plazo durante el cual se van a producir los pagos de esas rentas es desconocido, aunque se conozca su inicio por medio de edades en las pensiones por vejez, existe la probabilidad que fallezca antes de las edades de jubilación, de igual forma las pensiones por invalidez y sobrevivencia, su inicio y/o su final puede estar influenciados por acontecimientos inciertos que están sujetos a la ocurrencia de alguna contingencia vital, tal como el fallecimiento o el menoscabo por el estado de invalidez.

En el caso del Sistema de Ahorro para Pensiones y derivado de lo anterior, los cálculos previsionales revisten un carácter estocástico de las pensiones, lo que hace necesario la asociación de factores probabilísticos al cálculo meramente financiero de una anualidad cierta. Llegado a este punto, se observa un enlace directo entre esos factores probabilísticos y la biometría; dichos factores son tomados de series biométricas contenidas en las tablas actuariales, o de mortalidad (por ser este el riesgo intuitivamente más inmediato).

1.7 Perfil Demográfico de El Salvador

El Salvador al igual que muchos países ha entrado en una transición demográfica moderada (ya que presenta variables biodemográficas de mortalidad en descenso y una natalidad relativamente moderada), en sus inicios se contaba con un relativo equilibrio demográfico, explicado por el crecimiento de la población derivado de una elevada tasa de fecundidad, la cual estuvo compensada por una elevada mortalidad, las tendencias de esos componentes demográficos, con el tiempo ha cambiado su propensión y se observa hoy una disminución. El Salvador está ubicado en América Central, tiene una extensión territorial de 21,041 km2, y está dividido geográficamente en 14 departamentos y 262 municipios. Para el 2011, el índice de desarrollo humano, con un valor de 0.679 ubica al país en la posición 107 entre 186 países, el país es se ubica en un Rankin de IDH país como Desarrollo humano medio. Según la fuente de: HDRO calculations based on data from UNDESA (2011), Barro and Lee (2011), UNESCO Institute for Statistics (2012), World Bank (2012) and IMF (2012). Consultado el 24-06-2012 http://hdrstats.undp.org/es/indicadores/103106.html).

El Salvador cuenta con cinco Censos de Población y Vivienda desde 1950 al 2007, los cambios registrados obedecen principalmente a los componentes de fecundidad, mortalidad y las migraciones internacionales, las transformaciones demográficas para el país han conllevado a un aumento en la población especialmente en los Adultos y en los Ancianos, estos últimos han crecido en 3.84 puntos porcentuales desde 1950, ello refleja que en El Salvador se está empezando a gestar un proceso progresivo de envejecimiento de la estructura por edad como se advierte en el presente apartado, la típica forma piramidal de la estructura por edad de los salvadoreños comenzó a desdibujarse a partir de los Censos de 1992 y 2007, la proporción de menores de 0 14 años se redujo pasando de 41.16% de participación en 1950 a 33.89% en el 2007. Este proceso de envejecimiento planteará serios desafíos a El Salvador en las próximas décadas en los regímenes previsionales y programas de salud especialmente.

En la actualidad, El Salvador es un país joven, como se observará en el presente apartado, la estructura de la población por tramos de edad y por sexos es todavía piramidal, ver los años censados de 1950, 1961 y 1971, todavía dista de las poblaciones envejecidas típicas de los países europeos y otros de sur América.

La distribución de la población por edades, según Censo en el año 2007, muestra una preponderancia nítida de las cohortes en edades tempranas y en edad activa (en especial, entre los 20 y los 44 años), siendo los grupos de niños y jóvenes sensiblemente más numerosos que la población en edades avanzadas y por ende los pensionados. El envejecimiento generalmente se describe sintéticamente como el incremento sostenido de la proporción de personas de 65 y más años con respecto a la población total, lo que resulta de una progresiva alteración del perfil de la estructura por edades, cuyos rasgos piramidales "clásicos" (con una base amplia y una cúspide angosta) se van desdibujando para darle una fisonomía rectangular y tender, posteriormente, a la inversión de su forma inicial (con una cúspide más ancha que su base).

En el plano de El Salvador así como el resto de países Latinoamericanos, se están gestando otras manifestaciones biométricas, tales como: reducción de la mortalidad, variaciones decrecientes en la fecundidad (nacen en promedio menos niños por mujer que antes) y aumentos en la esperanza de vida, generalmente esos fenómenos son logros asociados a un mayor desarrollo socioeconómico, que redunda en mejores estándares de salud; pero esos efectos combinados generan efectos no siempre favorables desde una perspectiva globalizante, ya que los sistemas previsionales tendrán el desafío de atender y financiar pensiones de más personas y por un tiempo mayor.

De acuerdo al Centro Latinoamericano y Caribeño de Demografía (CELADE – División de Población), la Tasa global de fecundidad (número promedio de hijas e hijos que nacerían de una mujer) fue para 1950 cercana a los 7 hijos por mujer (6.46 hijos por mujer) en la década del 50, en la segunda mitad del siglo XX, las condiciones de reproducción cambiaron sustancialmente de forma tal que se redujo a 3 hijos por mujer para principios del siglo XXI (3.17 hijos por mujer), cercana a la fecundidad de reemplazo ideal de 2.1 hijos por mujer que es el nivel establecido tradicionalmente como el mínimo requerido para asegurar el denominado nivel de reemplazo de una población, para el caso del país en el quinquenio 2010-2015 la tasa según el organismo citado será de 2.11 hijos por mujer, muy cercana a la tasa de fecundidad de reemplazo ideal.

Cuadro No. 1

EL SALVADOR: Tasas de fecundidad y distribución relativa por edades, tasa global de fecundidad, y nacimientos anuales por edad de la madre según quinquenios

1950-2000

Período histórico

	Grupos de edad							
Período	**15 - 19**	**20 - 24**	**25 - 29**	**30 - 34**	**35 - 39**	**40 - 44**	**45 - 49**	**Total (TGF)***
				Tasas por edades				
1950 - 1955	0.1418	0.3140	0.3320	0.2628	0.1622	0.0635	0.0152	6.46
1955 - 1960	0.1468	0.3319	0.3346	0.2731	0.1873	0.0711	0.0165	6.81
1960 - 1965	0.1654	0.3207	0.3206	0.2710	0.1779	0.0972	0.0166	6.85
1965 - 1970	0.1600	0.3102	0.3100	0.2621	0.1720	0.0940	0.0159	6.62
1970 - 1975	0.1506	0.2992	0.2887	0.2337	0.1528	0.0807	0.0142	6.10
1975 - 1980	0.1412	0.2870	0.2679	0.2074	0.1351	0.0686	0.0126	5.60
1980 - 1985	0.1296	0.2363	0.2074	0.1572	0.1065	0.0519	0.0111	4.50
1985 - 1990	0.1188	0.2113	0.1796	0.1322	0.0868	0.0407	0.0108	3.90
1990 - 1995	0.1106	0.1922	0.1655	0.1159	0.0753	0.0338	0.0107	3.52
1995 - 2000	0.0952	0.1741	0.1513	0.1055	0.0690	0.0308	0.0081	3.17
2000 - 2005	0.0871	0.1573	0.1369	0.0959	0.0633	0.0285	0.0076	2.88
2005 - 2010	0.0734	0.1342	0.1162	0.0807	0.0527	0.0234	0.0061	2.43
2010 - 2015	0.0636	0.1173	0.1012	0.0699	0.0453	0.0199	0.0051	2.11

* TGF: Tasa global de fecundidad = suma de las tasas por edad por cinco.

La componente importante para el estudio del presente documento es la relacionada a la mortalidad, con referencia a CELADE, la mortalidad general logró una mejora valiosa lo cual llevó a un incremento de 25.7 años en la esperanza de vida al nacer para hombres y de 29.6 años para las mujeres, entre el quinquenio de 1950-1955 y el quinquenio 2010-2015. Una de las causas que originaron esa considerable pérdida fue derivado del descenso de la tasa de mortalidad infantil, cuyos niveles para el primer quinquenio fue del 161.3 por mil para hombres y para mujeres 140.3 por mil, ya para el quinquenio 2010-2015 será en promedio del 18.7 por mil para hombres y 16.3 por mil para las mujeres. (Ver Anexo No. 2).

Cuadro No. 2

EL SALVADOR: Indicadores del crecimiento demográfico estimados y proyectados por quinquenios

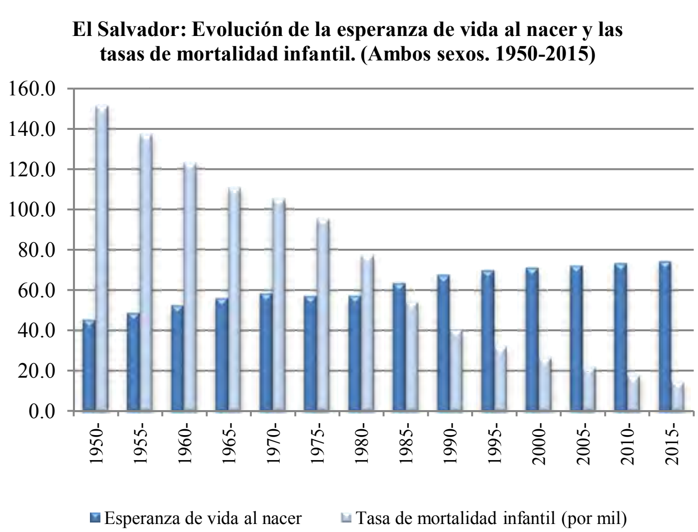
(Período / 1970-2015)

Indicadores demográficos	1970-1975	1975-1980	1980-1985	1985-1990	1990-1995	1995-2000	2000-2005	2005-2010	2010-2015
Muertes anuales (en miles)	43	49	51	39	36	36	39	42	45
% de defunciones por edades									
0-14	62.3	51.9	40.8	34.1	26.7	22.9	18.9	15.4	12.5
15-64	21.6	31.4	39.9	39.0	39.4	38.6	38.9	39.3	39.3
65 y más	16.1	16.8	19.3	26.9	33.9	38.5	42.2	45.3	48.2
Tasa bruta de mortalidad (por mil)	11.1	11.3	10.8	7.9	6.7	6.1	5.9	5.8	5.8
Esperanza de vida al nacer									
Ambos sexos	58.3	57.1	57.1	63.4	67.1	69.4	70.6	71.8	72.9
Hombres	56.1	52.2	50.8	59.0	63.3	66.5	67.7	68.8	69.8
Mujeres	60.6	62.2	63.8	68.0	71.1	72.5	73.7	74.9	76.0
Tasa de mortalidad infantil (por mil)									
Ambos sexos	105.0	95.0	77.0	54.0	40.2	32.0	26.4	21.5	17.5
Hombres	112.5	101.9	82.7	59.9	43.9	34.9	28.6	23.2	18.7
Mujeres	97.1	87.7	71.0	47.9	36.3	29.0	24.1	19.8	16.3

Fuente: CELADE

De forma consolidada (ambos sexos) la evolución de la Esperanza de vida y la Mortalidad infantil se puede apreciar el siguiente gráfico:

Gráfico No. 1



Los nexos con otros países especialmente con Estados Unidos ha sido para El Salvador toda una cultura de emigración internacional, éste es un factor adicional importante para la sociedad salvadoreña en lo que respecta a la evolución demográfica, que bien explica las características del cambio poblacional del país, hay que mencionar que el rápido descenso del ritmo de crecimiento de la población en El Salvador estuvo condicionado por el importante incremento de la emigración internacional en particular a partir de la década del 70 y la de los 80, derivado principalmente del conflicto armado, para el quinquenio 1980-1985 alcanzó la ratio de -14.8 por mil, a partir del siguiente quinquenio El Salvador presentó tasas decrecientes, no obstante hoy en día sigue siendo una práctica de emigración internacional denominada la diáspora salvadoreña.

Los datos provenientes de fuentes de información socio demográfica proporcionadas por CELADE, y además las encuestas nacionales de fecundidad, los censos nacionales y de las series de estadísticas vitales de El Salvador suministradas por la Dirección General de Estadística y Censos (DIGESTYC), ha permitido identificar evidencias de cambios de escala en las tendencias de las variables demográficas (la fecundidad, la mortalidad y la migración internacional), estos componentes son, principalmente los factores que de forma directa definen y regularizan el ritmo de crecimiento de la población y el avance en la transición demográfica, por lo que permite exponer que El Salvador es un país en vías de desarrollo que presenta una tendencia clara de envejecimiento, debido a la reducción de la fecundidad que induce a un menor número de hijos y de otro lado la mayor sobrevivencia de las personas, lo que implicará un mayor número de personas en edad avanzada integrados en los hogares y familias salvadoreñas.

El Salvador es un país en desarrollo de renta media, el cual ha experimentado al igual que muchos países de Europa un proceso de transición demográfica, lo que ha sido el resultado de combinaciones de las principales componentes demográficas de fecundidad, mortalidad y con importancia, las migraciones internacionales que se han experimentado desde antes de la década de los 50, ello ha conllevado a que el país comenzó un sendero de evolución del estado y condiciones de las actuales poblaciones; los cambios generados se observan sobre el tamaño y la estructura por edad y género de la población, dichos cambios han modelado un nuevo patrón de comportamiento de los salvadoreños, que impactan y lo harán a futuro aún más en la demanda y oferta de bienes y servicios y su distribución; además, cobra importancia observar detenidamente los cambios que de forma continuada se van perfilando en las diferentes generaciones, para ver los impactos cualitativos y cuantitativos en la sociedad, economía, patrones culturales y especialmente en la calidad de vida de los salvadoreños.

En virtud de lo anterior, resulta necesario e importante analizar la magnitud y significado de los cambios en el tamaño de los grupos poblacionales en edades puntuales y por género, ello viene a constituirse en grupos que resultan ser propósitos de estudio de los diferentes programas sociales del gobierno, especialmente en los sistemas de Salud y previsionales de El Salvador.

En el presente apartado se exhibe un análisis sobre lo acontecido en El Salvador a lo largo de 57 años de la historia demográfica del país entre los años 1950 y 2007, considerando para ello, los Censos de Población y Vivienda de los años 1950, 1961, 1971, 1992 y 2007.

Cuadro No. 3

EL SALVADOR: Población total, censada por tramos de edad

Censos 1950 - 2007

Grupo de Edad	1950	1961	1971	1992	2007
0-4	289,054	431,658	597,307	658,219	555,893
5-9	250,178	383,553	581,597	646,366	684,727
10-14	224,169	309,305	471,787	675,761	706,347
15-19	198,843	242,248	359,588	590,005	600,565
20-24	177,138	214,829	296,212	483,270	486,542
25-29	140,323	172,503	230,125	394,450	457,890
30-34	112,429	150,730	199,711	325,038	402,249
35-39	111,928	139,022	186,109	265,000	353,147
40-44	89,531	111,796	151,115	229,341	303,631
45-49	69,181	89,906	121,771	183,914	252,122
50-54	63,248	75,844	98,286	163,379	215,734
55-59	36,039	50,913	70,009	125,329	183,075
60-64	37,781	58,075	67,924	122,912	151,864
65-69	20,425	29,157	44,197	86,786	125,157
70-74	14,480	21,468	37,751	69,169	97,457
75-79	8,612	13,156	18,768	44,174	75,984
80-84	6,256	8,699	12,108	30,137	46,870
85-89	2,612	4,226	6,267	16,090	29,505
90-94	1,396	1,699	2,221	6,234	10,548
95+	1,088	1,417	1,710	3,025	4,806
Total	**1,854,711**	**2,510,204**	**3,554,563**	**5,118,599**	**5,744,113**

Fuente: DIGESTYC, El Salvador.

Cuadro No. 4
El Salvador: Tasa de Crecimiento Poblacional

Años	Población Censada	Período (Años)	Tasa de Crecimiento %
1950	1,854,711		
1961	2,510,204	11	**2.79%**
1971	3,554,563	21	**3.15%**
1992	5,118,599	42	**2.45%**
2007	5,744,113	57	**2.00%**

Fuente: Elaboración propia

Como puede observase en el cuadro antecedido, la población de El Salvador se duplicó en más de 20 años, el período 1950 y 1971, con tasas de crecimiento del 2.79% (1961) y 3.15% (1971), y consiguió triplicarse hacia el año 2007, esto es en un período de 57 años. En términos relativos, el mayor crecimiento ocurrió entre los años 1961–1971 cuando se registraron las tasas de crecimiento más elevadas y para el año 2007 se observa un descenso con respecto a 1950 con una tasa del 2.00%. Con los inicios de los años 70, el crecimiento demográfico cambió considerablemente, principalmente por dos por factores sociales como lo fue el conflicto armado y por ende la emigración internacional, un tercer factor fue el descenso de la fecundidad.

Entre las características de mayor relevancia es que la población creció en el orden de 1.9 millones con respecto a 1950, se duplicó en algún momento de los primeros años de la década de los 70, esto representa un período de aproximadamente de más de 20 años, cuando se realizó el censo de 1971 el conteo dio una cifra de 3,6 millones de personas, llegando al 2007 a una cifra de 5,7 millones de habitantes, esto representó tres veces la población que se censó en el año 1950.

Para sustentar lo anterior a continuación se realizará un análisis de la evolución demográfica con el desarrollo de cinco pirámides poblacionales.

Población de El Salvador 1950, según Censo

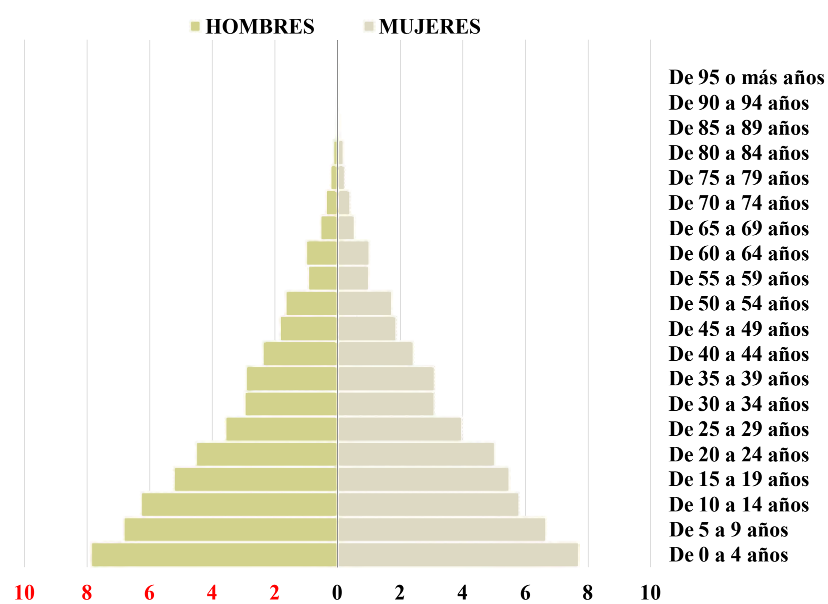
Cuadro No. 5

Población: El Salvador

1950	TOTAL	CIFRAS ABSOLUTAS		PORCENTAJE/S TOTAL	
		HOMBRES	MUJERES	HOMBRES	MUJERES
Total	**1,854,711**	**917,784**	**936,927**	**49**	**51**
De 0 a 4 años	289,054	146,156	142,898	7.88	7.70
De 5 a 9 años	250,178	126,505	123,673	6.82	6.67
De 10 a 14 años	224,169	116,483	107,686	6.28	5.81
De 15 a 19 años	198,843	97,083	101,760	5.23	5.49
De 20 a 24 años	177,138	83,841	93,297	4.52	5.03
De 25 a 29 años	140,323	66,466	73,857	3.58	3.98
De 30 a 34 años	112,429	55,035	57,394	2.97	3.09
De 35 a 39 años	111,928	54,330	57,598	2.93	3.11
De 40 a 44 años	89,531	44,370	45,161	2.39	2.43
De 45 a 49 años	69,181	34,348	34,833	1.85	1.88
De 50 a 54 años	63,248	30,923	32,325	1.67	1.74
De 55 a 59 años	36,039	17,436	18,603	0.94	1.00
De 60 a 64 años	37,781	18,719	19,062	1.01	1.03
De 65 a 69 años	20,425	10,236	10,189	0.55	0.55
De 70 a 74 años	14,480	6,903	7,577	0.37	0.41
De 75 a 79 años	8,612	4,295	4,317	0.23	0.23
De 80 a 84 años	6,256	2,647	3,609	0.14	0.19
De 85 a 89 años	2,612	1,134	1,478	0.06	0.08
De 90 a 94 años	1,396	507	889	0.03	0.05
De 95 o más años	1,088	367	721	0.02	0.04

Fuente: DIGESTYC, El Salvador.

Gráfico No. 2



De acuerdo al Censo de 1950, el número de hombres era menor (49%) que las mujeres (51%), la población de niños y jóvenes tenían una destacada importancia ya que los primeros tres rangos entre 0 a 14 años representaba el 41.16% del total de 1.9 millones de salvadoreños, distribuidos en 20.98% los hombres (389,144 personas) y 20.18% las mujeres (374,257 personas); en el rango de la población de ancianos entre 65 a 95 o más años, las mujeres censadas fueron 28,780 (1.55%) y los hombres fueron 26,089 (1.41%). El porcentaje total de ancianos ascendió a 2.96% para un total de 54,869 habitantes.

La forma de la pirámide es una pirámide progresiva con forma de pagoda, ello induce a pensar que es una población relativamente menor, el envejecimiento demográfico no es observable, ya que hay un peso menor de la población en edades avanzadas (mayor de 65 años), respecto al conjunto de la población y especialmente en los primeros cuatro tramos. En conclusión para este apartado a 1950 la población en edades predominaban los menores y adolescentes y los adultos mayores eran poco significativos; no obstante la población de adultos eran la mayoría con 1,036,441 personas (502,551 hombres y 533,890) y representaron el 55.88% del total de los habitantes censados.

Población de El Salvador 1961, según Censo

Once años después la población de El Salvador creció a un ritmo del 2.79% y como producto del aumento en la esperanza de vida al nacer y el descenso de la tasa de mortalidad infantil se observa en el siguiente gráfico para los tramos de edad de 0 a 14 años la base de la pirámide tiene un aumento poblacional, las mujeres representaron el 22.06% y los hombres el 22.74% para un total de 1,124,516 que representa el 44.80% de 2,510,204 habitantes a ese año. Con respecto al Censo de 1950 los 3 tramos de edad de 0 14 años aumentaron en 361,115 habitantes entre hombres y mujeres con un crecimiento de 3.64 puntos porcentuales.

La población de adultos sigue posicionándose con más del 50% de la población censada, destacándose la mujer con 27.01% y los hombres con el 25.02%.

La población mayor a los 65 años de edad representaba el 3.18% (1.49% Hombres y 1.69% las mujeres), con respecto a 1950 éstos aumentaron en 24,953 habitantes (0.22% puntos porcentuales), para este periodo no se observa un aumento significativo en adultos mayores de forma significativa.

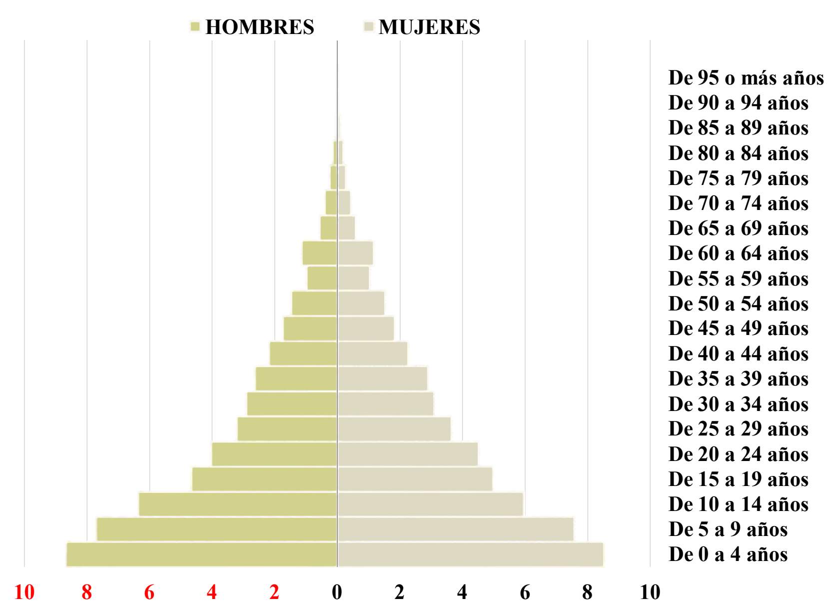
Cuadro No. 6

Población: El Salvador

1961	TOTAL	CIFRAS ABSOLUTAS		PORCENTAJE/S TOTAL	
		HOMBRES	MUJERES	HOMBRES	MUJERES
Total	**2,510,204**	**1,236,216**	**1,273,988**	**49**	**51**
De 0 a 4 años	431,658	217,613	214,045	8.67	8.53
De 5 a 9 años	383,553	193,359	190,194	7.70	7.58
De 10 a 14 años	309,305	159,798	149,507	6.37	5.96
De 15 a 19 años	242,248	117,234	125,014	4.67	4.98
De 20 a 24 años	214,829	101,363	113,466	4.04	4.52
De 25 a 29 años	172,503	80,859	91,644	3.22	3.65
De 30 a 34 años	150,730	73,035	77,695	2.91	3.10
De 35 a 39 años	139,022	66,101	72,921	2.63	2.90
De 40 a 44 años	111,796	54,866	56,930	2.19	2.27
De 45 a 49 años	89,906	43,711	46,195	1.74	1.84
De 50 a 54 años	75,844	37,236	38,608	1.48	1.54
De 55 a 59 años	50,913	24,765	26,148	0.99	1.04
De 60 a 64 años	58,075	28,808	29,267	1.15	1.17
De 65 a 69 años	29,157	14,196	14,961	0.57	0.60
De 70 a 74 años	21,468	10,265	11,203	0.41	0.45
De 75 a 79 años	13,156	6,255	6,901	0.25	0.27
De 80 a 84 años	8,699	3,829	4,870	0.15	0.19
De 85 a 89 años	4,226	1,780	2,446	0.07	0.10
De 90 a 94 años	1,699	657	1,042	0.03	0.04
De 95 o más años	1,417	486	931	0.02	0.04

Fuente: DIGESTYC, El Salvador.

Gráfico No. 3



El censo de 1961, reportó que el número de hombres era menor que las mujeres, que para el total de la población los hombres eran el 49%, y las mujeres 51%, la población joven tenía una destacada importancia ya que los primeros tres rangos entre 0 a 14 años representaba el 44.80% del total de 2.5 millones de salvadoreños, distribuidos en 22.74% los hombres (570,770 personas) y 22.06% las mujeres (553,746 personas); en el rango de la población adulta entre 15 a 64 años, las mujeres censadas fueron 677,888 (27.01%) y los hombres fueron 627,978 (25.02%). El porcentaje total de adultos mayores (ancianos) ascendió a 3.18% para un total de 79,822 habitantes.

Población de El Salvador 1971, según Censo

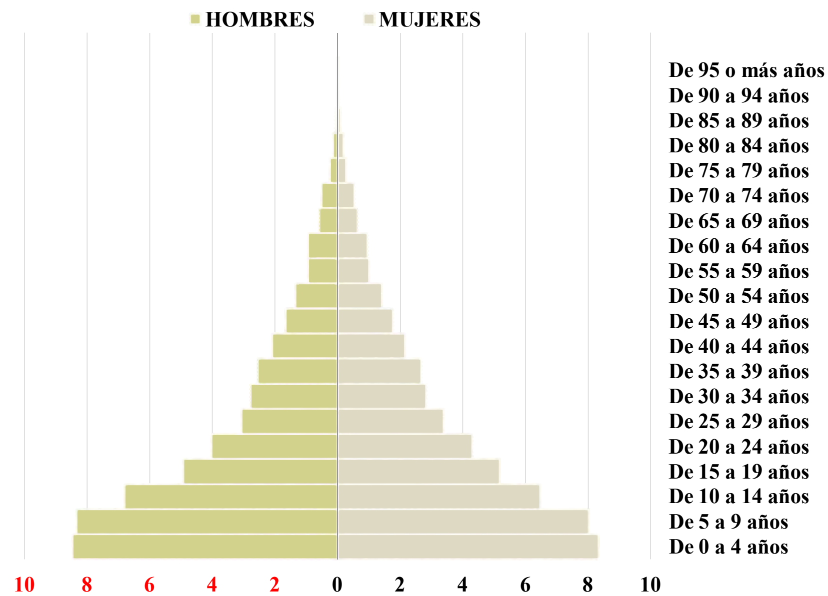
Cuadro No. 7

Población: El Salvador

1971	TOTAL	CIFRAS ABSOLUTAS		PORCENTAJE/S TOTAL	
		HOMBRES	MUJERES	HOMBRES	MUJERES
Total	**3,554,563**	**1,763,184**	**1,791,379**	**50**	**50**
De 0 a 4 años	597,307	300,678	296,629	8.46	8.35
De 5 a 9 años	581,597	296,365	285,232	8.34	8.02
De 10 a 14 años	471,787	241,719	230,068	6.80	6.47
De 15 a 19 años	359,588	175,330	184,258	4.93	5.18
De 20 a 24 años	296,212	143,311	152,901	4.03	4.30
De 25 a 29 años	230,125	109,384	120,741	3.08	3.40
De 30 a 34 años	199,711	99,080	100,631	2.79	2.83
De 35 a 39 años	186,109	90,687	95,422	2.55	2.68
De 40 a 44 años	151,115	74,454	76,661	2.09	2.16
De 45 a 49 años	121,771	58,998	62,773	1.66	1.77
De 50 a 54 años	98,286	47,725	50,561	1.34	1.42
De 55 a 59 años	70,009	33,863	36,146	0.95	1.02
De 60 a 64 años	67,924	33,825	34,099	0.95	0.96
De 65 a 69 años	44,197	21,069	23,128	0.59	0.65
De 70 a 74 años	37,751	18,279	19,472	0.51	0.55
De 75 a 79 años	18,768	8,978	9,790	0.25	0.28
De 80 a 84 años	12,108	5,269	6,839	0.15	0.19
De 85 a 89 años	6,267	2,722	3,545	0.08	0.10
De 90 a 94 años	2,221	831	1,390	0.02	0.04
De 95 o más años	1,710	617	1,093	0.02	0.03

Fuente: DIGESTYC, El Salvador.

Gráfico No. 4



El Censo de 1971 registró un crecimiento poblacional del 3.15% con respecto al de 1950, demostró que el número de hombres era similar al de las mujeres (50%), para el total de la población los hombres y mujeres eran poblaciones jóvenes ya que tenían una destacada importancia, para los primeros tres rangos entre 0 a 14 años representaba el 46.44% del total de 3.5 millones de salvadoreños, distribuidos en 23.60% los hombres (838,762 personas) y 22.84% las mujeres (811,929 personas); en el rango de la población adulta (ancianos) mayores a 65 años, las mujeres censadas fueron 65,257 (1.84%) y los hombres fueron 57,765 (1.63%). El porcentaje total de ancianos ascendió a 3.46% para un total de 123,022 habitantes adultos.

La población de adultos siempre sigue siendo levemente más del 50%, no obstante decreció 5.78 puntos porcentuales con respecto al censo de 1950, siendo las mujeres las que más descendieron (3.07 y los hombres 2.71 puntos porcentuales).

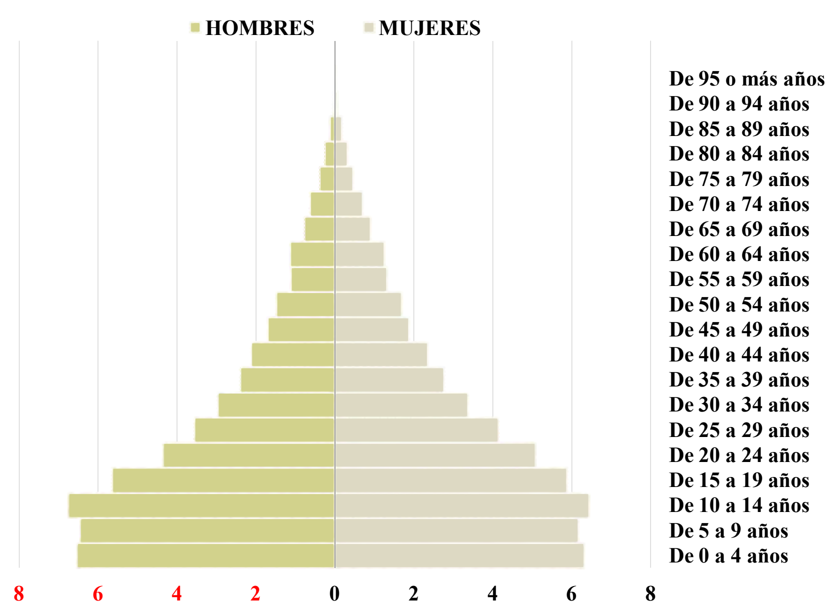
Población de El Salvador 1992, según Censo

Cuadro No. 8

Población: El Salvador 1992	TOTAL	CIFRAS ABSOLUTAS		PORCENTAJE/S TOTAL	
		HOMBRES	MUJERES	HOMBRES	MUJERES
Total	**5,118,599**	**2,485,613**	**2,632,986**	**49**	**51**
De 0 a 4 años	658,219	334,708	323,511	6.54	6.32
De 5 a 9 años	646,366	330,236	316,130	6.45	6.18
De 10 a 14 años	675,761	345,974	329,787	6.76	6.44
De 15 a 19 años	590,005	289,109	300,896	5.65	5.88
De 20 a 24 años	483,270	222,909	260,361	4.35	5.09
De 25 a 29 años	394,450	182,278	212,172	3.56	4.15
De 30 a 34 años	325,038	152,015	173,023	2.97	3.38
De 35 a 39 años	265,000	123,135	141,865	2.41	2.77
De 40 a 44 años	229,341	108,873	120,468	2.13	2.35
De 45 a 49 años	183,914	87,323	96,591	1.71	1.89
De 50 a 54 años	163,379	76,260	87,119	1.49	1.70
De 55 a 59 años	125,329	57,639	67,690	1.13	1.32
De 60 a 64 años	122,912	58,177	64,735	1.14	1.26
De 65 a 69 años	86,786	40,044	46,742	0.78	0.91
De 70 a 74 años	69,169	32,672	36,497	0.64	0.71
De 75 a 79 años	44,174	20,274	23,900	0.40	0.47
De 80 a 84 años	30,137	13,477	16,660	0.26	0.33
De 85 a 89 años	16,090	6,863	9,227	0.13	0.18
De 90 a 94 años	6,234	2,544	3,690	0.05	0.07
De 95 o más años	3,025	1,103	1,922	0.02	0.04

Fuente: DIGESTYC, El Salvador.

Gráfico No. 5



El Censo de 1992 con una población total de 5,118,599 habitantes registró un crecimiento de 2.45% con respecto al Censo de 1950, el número de hombres era menor que las mujeres, que para el total de la población éstos fueron el 49%, y las mujeres 51%, la población de niños y jóvenes tuvieron una participación importante ya que los primeros tres rangos entre 0 a 14 años representaba el 38.69% del total de 5.1 millones de salvadoreños, distribuidos en 19.75% los hombres (1,010,918 personas) y 18.94% las mujeres (969,428 personas); en el rango de la población adulta entre 15 a 64 o más años, las mujeres censadas fueron 1,524,920 (29.79%) y los hombres fueron 1,357,718 (26.53%) y cuarenta y dos años después de 1950, la población adulta es casi la mitad de la población total (56.32%).

El porcentaje total de ancianos ascendió a 4.99% para un total de 255,615 habitantes. Para este año ya se comienza a visualizar un envejecimiento de la población los tramos de los ancianos para el año en estudio tuvo un incremente de 200,746 habitantes con respecto a 1950, la forma de la pirámide comienza a ser como un bulbo y tiende a ser regresiva, se observa en la base que los niños son menores a los jóvenes, lo anterior debido aún incremento en la esperanza de vida acompañado de un descenso en la natalidad.

Población de El Salvador 2007, según Censo

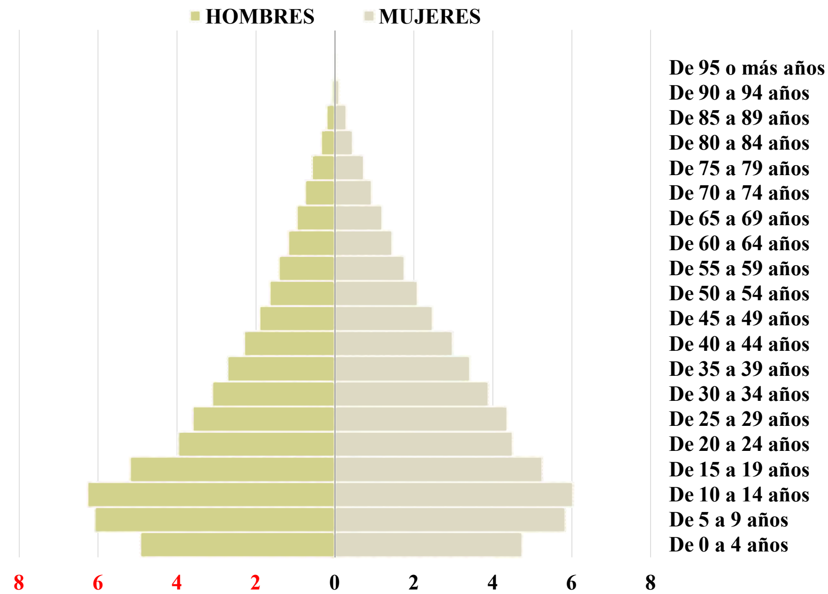
Cuadro No. 9

Población: El Salvador

2007	**TOTAL**	**CIFRAS ABSOLUTAS**		**PORCENTAJE/S TOTAL**	
		HOMBRES	**MUJERES**	**HOMBRES**	**MUJERES**
Total	**5,744,113**	**2,719,371**	**3,024,742**	**47**	**53**
De 0 a 4 años	555,893	283,272	272,621	4.93	4.75
De 5 a 9 años	684,727	349,150	335,577	6.08	5.84
De 10 a 14 años	706,347	359,523	346,824	6.26	6.04
De 15 a 19 años	600,565	298,384	302,181	5.19	5.26
De 20 a 24 años	486,542	228,001	258,541	3.97	4.50
De 25 a 29 años	457,890	206,963	250,927	3.60	4.37
De 30 a 34 años	402,249	178,400	223,849	3.11	3.90
De 35 a 39 años	353,147	156,514	196,633	2.72	3.42
De 40 a 44 años	303,631	132,218	171,413	2.30	2.98
De 45 a 49 años	252,122	109,957	142,165	1.91	2.47
De 50 a 54 años	215,734	95,275	120,459	1.66	2.10
De 55 a 59 años	183,075	81,718	101,357	1.42	1.76
De 60 a 64 años	151,864	68,207	83,657	1.19	1.46
De 65 a 69 años	125,157	55,781	69,376	0.97	1.21
De 70 a 74 años	97,457	43,449	54,008	0.76	0.94
De 75 a 79 años	75,984	33,658	42,326	0.59	0.74
De 80 a 84 años	46,870	20,401	26,469	0.36	0.46
De 85 a 89 años	29,505	12,471	17,034	0.22	0.30
De 90 a 94 años	10,548	4,249	6,299	0.07	0.11
De 95 o más años	4,806	1,780	3,026	0.03	0.05

Fuente: DIGESTYC, El Salvador.

Gráfico No. 6



El Censo de 2007 (último realizado en El Salvador) reconoció un crecimiento demográfico del 2.0% con respecto a 1950, con una población total de 5,744,113 habitantes, los hombres 2,719,371 son menor que las mujeres 3,024,742, que para el total de la población los hombres eran el 47%, y las mujeres 53%, la población joven aún destaca ya que los primeros tres rangos entre 0 a 14 años representaba el 33.89% del total de 5.7 millones de salvadoreños, distribuidos en 17.27% los hombres (1,946,967 personas) y 16.63% las mujeres (991,945 personas); en el rango de la población adulta entre 15 a 64 años, las mujeres censadas fueron 1,851,182 (32.23%) y los hombres fueron 3,406,819 (27.08%). El porcentaje total de ancianos ascendió a 6.80% para un total de 390,327 habitantes, en donde las mujeres tiene una participación de 3.80% y los hombres del 2.99%. Como era de esperarse la definición de la pirámide es de tipo regresiva más pronunciada que la del Censo de 1992 y la mortalidad en edades avanzadas es mayor entre el colectivo de los hombres.

De acuerdo al siguiente cuadro la población de Niños y Jóvenes eran para el Censo de 1950 41.16%, 57 años más tarde descendieron 33.89%, las poblaciones de Adultos han sido la mayoría de acuerdo a los cinco Censos realizados ya que para los cinco años fueron más del 50%, el punto relevante son los Ancianos ya que para 1950 era del 2.96%, porcentaje que se ve duplicado para el año de 2007 con 6.80%, creciendo en términos absolutos 335,458 personas en 2007 con respecto a 1950.

Cuadro No. 10
Consolidado poblacional por edades, estructura e índice de dependencia

Año	Niños y Jóvenes (De 0 a 14 años)	Adultos (De 15 a 64 años)	Ancianos (De 65 o más)	Total
1950	763,401	1,036,441	54,869	1,854,711
1961	1,124,516	1,305,866	79,822	2,510,204
1971	1,650,691	1,780,850	123,022	3,554,563
1992	1,980,346	2,882,638	255,615	5,118,599
2007	1,946,967	3,406,819	390,327	5,744,113
		Estructura Porcentual		
1961	41.16	55.88	2.96	100.00
1961	44.80	52.02	3.18	100.00
1971	46.44	50.10	3.46	100.00
1992	38.69	56.32	4.99	100.00
2007	33.89	59.31	6.80	100.00
		Índice de Dependencia		
1950	78.95%			
1961	92.23%			
1971	99.60%			
1992	77.57%			
2007	68.61%			

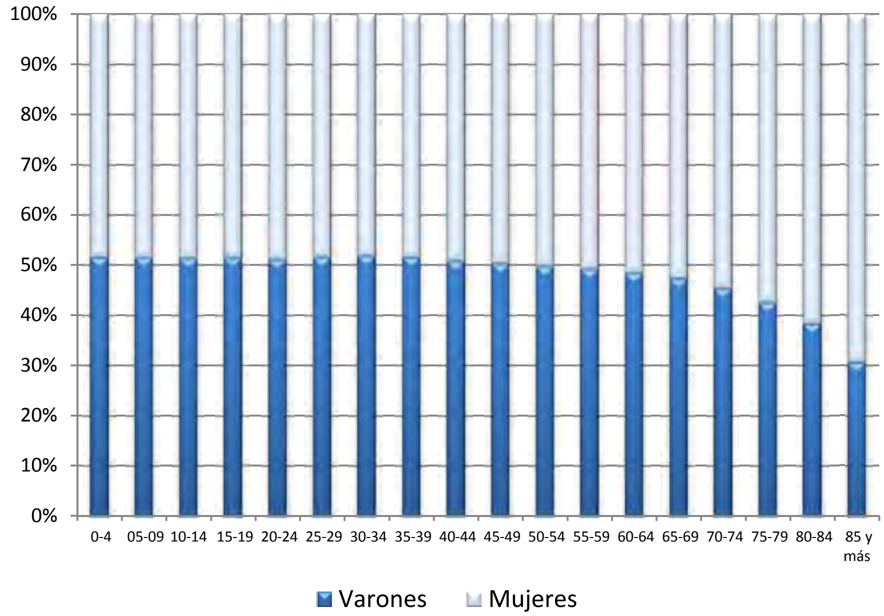
$$ID = \frac{Población(0-14) + Población(65 yMás)}{Población(15-64)}$$

Fuente: Elaboración Propia

Un aspecto importante a relacionar es el Índice de Dependencia, éste presentó hasta el Censo de 1971 ratios de crecimiento (de 78.95% en 1950 a 99.60% para ese año en referencia), del Censo de 1971 al 2007 presentó porcentajes decrecientes hasta llegar al 68.61%, este índice relacionado con los porcentajes de Ancianos van sugiriendo que la población de El Salvador va perfilando procesos de envejecimiento demográfico pese al descenso en el índice de dependencia.

En cuanto a la población por sexo y edad (grupos quinquenales), para el año 2007 presentó el siguiente comportamiento:

Gráfico No. 7
El Salvador: Población Según Sexos y Grupos de Edad



En edades tempranas como en los Adultos, las mujeres eran de igual tamaño que el colectivo de hombres, en edades avanzadas principalmente en los Ancianos las mujeres van ganando peso conforme la edad va incrementándose y son la mayoría debido a la mayor esperanza de vida que se ha experimentado en el país.

El Salvador: Indicadores de Mortalidad 2007

Desde mediados de la década anterior, la principal causa de muerte en el país, según datos del Instituto de Medicina Legal, fueron las enfermedades comunes. Tendencia que se ha revertido en los últimos años, ya que el orden se invirtió ahora las enfermedades comunes pasaron a ser el segundo causante de las muertes. Actualmente los homicidios, las enfermedades, los accidentes y los suicidios engrosaron los decesos. Las principales víctimas de los homicidios fueron personas en un rango de edad entre los 25 y los 29 años, en su mayoría hombres.

De acuerdo al Ministerio de Salud Pública y Asistencia Social las 10 principales causas de muerte por enfermedades son las siguientes:

1. Enfermedades no transmisibles crónico-degenerativas del Sistema Genito Urinario
2. Cerebro Vascular
3. Sistema Cardio Vascular
4. Diabetes
5. Neumonía
6. Septicemias

7. Traumatismos
8. Cáncer: Cuello uterino, mama, estomago, ovario(en Mujeres)
9. Cáncer Pulmonar, estomago, próstata y colo rectal (en Hombres)
10. Insuficiencia Renal Crónica.

Es importante mencionar que los decesos violentos comunes y el suicidio son considerados como problemas de salud pública y éste último es calificado como una de las tres primeras causas de muerte entre personas de 15 a 44 años de edad, la tasa de letalidad y mortalidad en casos de suicidio han sido de 8.26 por 100,000 habitantes a nivel de país, los dos factores mencionados explican la mayor densidad de población fallecida en el sistema previsional salvadoreño.

Como se observó en el apartado de la Tasa Global de Fecundidad, la Esperanza de Vida y la Mortalidad Infantil en El Salvador, las cuales han experimentado y continuarán percibiendo una disminución, ello impactará en la estructura por edades y género de la población del país lo que ha conllevado a una verticalización de la típica pirámide de edades en que predominaban los menores y adolescentes y los efectivos de los ancianos eran poco significativos hasta antes de los Censos de 1992 y 2007, los países como El Salvador irán pasando a una estructura vertical levemente modificada con una reducción de la base y un incremento de la cúspide de la pirámide.

Con el cambio a la baja especialmente de la mortalidad infantil ha generado que en el país la esperanza de vida se extendiera en promedio para los salvadoreños.

Cuadro No. 11

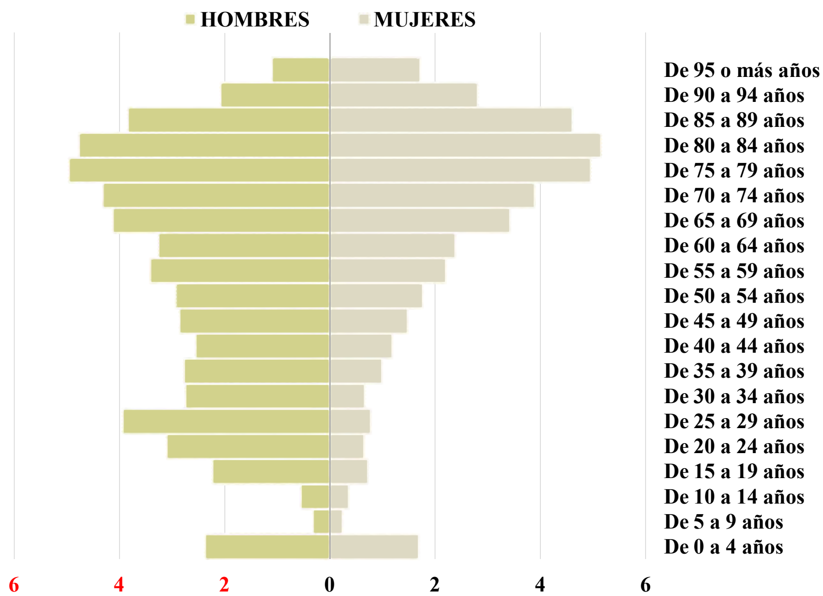
Población: Fallecimientos, El Salvador

2007	**TOTAL**	**CIFRAS ABSOLUTAS**		**PORCENTAJE/S TOTAL**	
		HOMBRES	**MUJERES**	**HOMBRES**	**MUJERES**
Total	**31,126**	**18,136**	**12,990**	**58**	**42**
De 0 a 4 años	1,267	739	528	2.37	1.70
De 5 a 9 años	179	102	77	0.33	0.25
De 10 a 14 años	287	174	113	0.56	0.36
De 15 a 19 años	922	696	226	2.24	0.73
De 20 a 24 años	1,170	966	204	3.10	0.66
De 25 a 29 años	1,469	1,225	244	3.94	0.78
De 30 a 34 años	1,063	855	208	2.75	0.67
De 35 a 39 años	1,173	864	309	2.78	0.99
De 40 a 44 años	1,164	794	370	2.55	1.19
De 45 a 49 años	1,352	891	461	2.86	1.48
De 50 a 54 años	1,461	912	549	2.93	1.76
De 55 a 59 años	1,748	1,062	686	3.41	2.20
De 60 a 64 años	1,758	1,015	743	3.26	2.39
De 65 a 69 años	2,351	1,284	1,067	4.13	3.43
De 70 a 74 años	2,555	1,342	1,213	4.31	3.90
De 75 a 79 años	3,086	1,543	1,543	4.96	4.96
De 80 a 84 años	3,088	1,484	1,604	4.77	5.15

De 85 a 89 años	2,631	1,196	1,435	3.84	4.61
De 90 a 94 años	1,524	649	875	2.09	2.81
De 95 o más años	878	343	535	1.10	1.72

Fuente: DIGESTYC, El Salvador.

Gráfico No. 8



En relación a la mortalidad en El Salvador de conformidad al Censo de 2007, los fallecimientos ascendieron a 31,126 predominó las muertes para el colectivo de hombres con el 58.0%, de acuerdo al gráfico anterior exceptuando las edades de 80 a 94 años las mujeres superaron en muertes a los hombres, es importante comentar que en las edades de Jóvenes y adultos (48.23% ambos tramos), hay una mortalidad diferencial por género considerable ya que las muertes son significativamente mayores la de los hombres debido al conflicto social interno que se está llevando en El Salvador, los homicidios han incrementado considerablemente especialmente en las edades de 20 a 59 años los cuales son provocados por pandillas.

	Distribución de la Población Fallecida			PORCENTAJE		
2007	**Total**	**Hombres**	**Mujeres**	**Hombres**	**Mujeres**	**Total %**
Niños y Jóvenes	1,733	1,015	718	3.26	2.31	5.57
Adultos	13,280	9,280	4,000	29.81	12.85	42.67
Ancianos	16,113	7,841	8,272	25.19	26.58	51.77
Total	**31,126**	**18,136**	**12,990**	**58.27**	**41.73**	**100.00**

No obstante lo anterior, los ancianos participan en mayor proporción en las muertes con el 51.77%, de los cuales el 25.19% fueron hombres y el 26.58% las mujeres.

El Salvador, Sistema de Pensiones

La administración y gestión del sistema previsional salvadoreño, estuvo a cargo a partir de 1969, del Instituto Salvadoreño del Seguro Social (ISSS), el cual atiende el programa de pensiones de invalidez vejez y muerte orientado al sector privado. En lo referente al sector público, a partir de 1975 se creó el Instituto Nacional de Pensiones Públicas (INPEP), el cual a partir de ese año administró el régimen de pensiones de los empleados públicos y municipales, en dos tipos de regímenes, el administrativo y el docente (éste último vigente a inicios de 1978); adicionalmente, esta Institución no obstante que fue creada con carácter previsional, manejó un programa especial de créditos personales e hipotecarios para sus afiliados.

En El Salvador el sistema de pensiones se basó en el reparto bajo la modalidad de prima media escalonada, que tuvo su fuente o pilar de financiamiento en las cotizaciones y aportaciones de trabajadores, empleadores y el Estado. Según las Leyes de creación de las dos principales instituciones previsionales, ISSS e INPEP, existió una heterogeneidad en la estructura del financiamiento. Hasta 1997, los trabajadores afiliados al INPEP, al régimen docente cotizaban en total del 12% del ingreso base (50% de la tasa el trabajador y 50% el patrono), mientras que al régimen administrativo cotizaron el 9%. (4.5% empleado y 4.5% empleador). Por su parte, los afiliados al ISSS, tienen una tasa de cotización total de 3.5% (1%, empleado, 2% empleador y 0.5% el aporte Estatal). El resultado de este esquema de financiamiento tuvo efectos regresivos a la hora de recibir los beneficios. Precisamente, en este esquema de financiamiento, surge el problema de la falta de vinculación entre las responsabilidades y los derechos que tenían los trabajadores salvadoreños, en conclusión se dio una clara incoherencia en el diseño del sistema.

En forma resumida, se han explicado los puntos principales que sugirieron e impulsaron un cambio estructural al sistema previsional existente hasta 1996; como se repite, más que hacer énfasis en los problemas derivados del sistema y sus características, el cambio realizado se orientó a la base principal en que se sustentaba el llamado sistema de reparto; precisamente, en realizar una reforma que cambiara estructuralmente, los elementos de diseño inherentes al sistema previsional salvadoreño, los cuales ya no estaban acordes a las variaciones demográficas, biométricas, actuariales y a las exigencias cambiantes y dinámicas del entorno económico y financiero moderno, hechos que eran inminentes y que planteaban un cambio y adaptación, hacia un nuevo sistema previsional.

Por último es necesario comentar que una de las características que diferenciaron la reforma impulsada de nuestro país, con el resto de reformas de Latinoamérica y precisamente en los países del cono sur, era la de sustituir el sistema antiguo por otro que reúne las principales características de un sistema de capitalización individual; con la diferencia de que la fiscalización del sistema antiguo (ISSS e INPEP, creándose de esta forma lo que hoy en día se conoce como Sistema de Pensiones Público, SPP), está a cargo de la superintendencia de Pensiones y es la misma entidad fiscalizadora que supervisa al Sistema de Ahorro para Pensiones.

Con el objeto de que el sistema de pensiones llegara a desempeñar un papel protagónico y de primer orden en la transformación en la seguridad social y en la modernización de nuestra economía, el gobierno de El Salvador consciente además, de mejorar la previsión social de los trabajadores, emitió en 1996 los Decretos Legislativos Nos. 926 y 927 correspondientes a la Ley Orgánica de las Superintendencia de Pensiones y a la Ley del Sistema de Ahorro para Pensiones, con la entrada en vigencia del nuevo sistema a partir de enero de 1997, se dio inicio a una de las reformas estructurales más importantes en la historia de la seguridad social en El Salvador, ya que se sustituyó el antiguo régimen de Prima Media Escalonada, por el de Capitalización Individual, los principales gestores de la reforma son los trabajadores, la empresa privada y el Estado.

En este siglo XXI de acuerdo a CELADE, se observará un crecimiento de la población en edades avanzadas no solo a nivel de El Salvador sino que también a nivel de la región de América Latina y el Caribe, por ende, el envejecimiento de la población repercutirá en el desarrollo de los países especialmente en los sectores a los que afecta (salud, educación, infraestructura y comercio, y, Sistemas previsionales).

A 2001, el Sistema de Ahorro para Pensiones presentó un mayor número hombres 56.0% con 772,285 y 595,957 mujeres (44.0%), la mayor densidad de población se reflejó en el tramo de 30 a 34 años con el 11.34% para los hombres y 9.58% para las mujeres, considerando las edades legales de pensionamiento (60 hombres y 55 mujeres), en 25 y 30 años el sistema de pensiones será sometido a fuertes presiones financieras ya que los colectivos actuales tendrán cumplido los requisitos de edad para pensionarse.

Cuadro No. 12

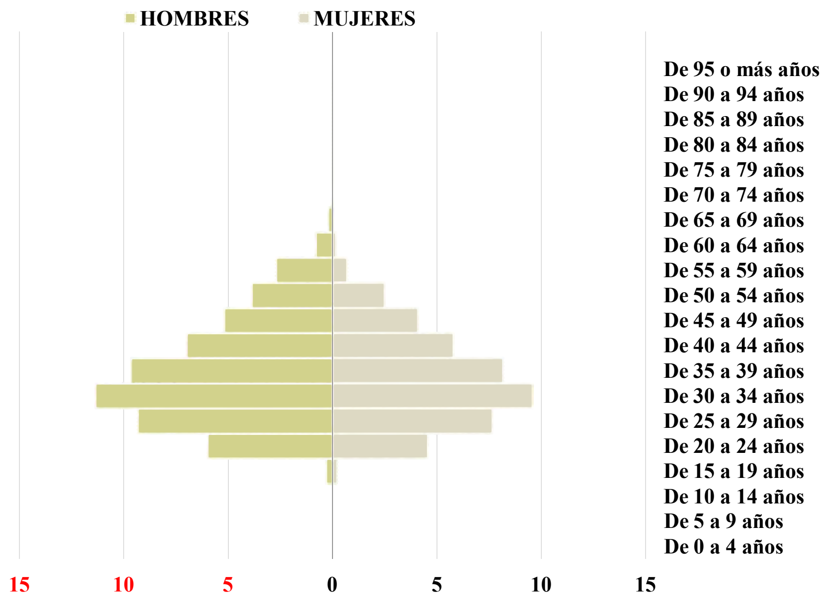
Población: Afiliados al Sistema de Ahorro para Pensiones, El Salvador.

2011	TOTAL	CIFRAS ABSOLUTAS		PORCENTAJE/S TOTAL	
		HOMBRES	MUJERES	HOMBRES	MUJERES
Total	**1,368,242**	**772,285**	**595,957**	**56**	**44**
De 0 a 4 años	0	0	0	0.00	0.00
De 5 a 9 años	0	0	0	0.00	0.00
De 10 a 14 años	0	0	0	0.00	0.00
De 15 a 19 años	7,180	4,089	3,091	0.30	0.23
De 20 a 24 años	144,354	81,892	62,462	5.99	4.57
De 25 a 29 años	232,593	127,614	104,979	9.33	7.67
De 30 a 34 años	286,324	155,188	131,136	11.34	9.58
De 35 a 39 años	243,927	132,006	111,921	9.65	8.18
De 40 a 44 años	175,068	95,645	79,423	6.99	5.80
De 45 a 49 años	127,229	71,131	56,098	5.20	4.10
De 50 a 54 años	87,306	53,059	34,247	3.88	2.50
De 55 a 59 años	46,650	37,037	9,613	2.71	0.70
De 60 a 64 años	13,387	11,024	2,363	0.81	0.17
De 65 a 69 años	3,261	2,835	426	0.21	0.03

De 70 a 74 años	657	530	127	0.04	0.01
De 75 a 79 años	200	153	47	0.01	0.00
De 80 a 84 años	86	68	18	0.00	0.00
De 85 a 89 años	13	11	2	0.00	0.00
De 90 a 94 años	6	2	4	0.00	0.00
De 95 o más años	1	1	0	0.00	0.00

Fuente: Superintendencia Adjunta de Pensiones, El Salvador

Gráfico No. 9



De conformidad a datos presentados, un total de afiliados al sistema de pensiones de 1,368,242, los hombres 56.44% representaron mayor número de afiliados que las mujeres. Además, se observa un número de población anciana que continúa en el sistema como afiliados, 4,224. La mayor concentración poblacional como era de esperarse en encuentra a 2011 en el tramo de los Adultos 99.69%.

				PORCENTAJE		
2011	**Total**	**Hombres**	**Mujeres**	**Hombres**	**Mujeres**	**Total %**
Niños y Jóvenes	0	0	0	0.00	0.00	0.00
Adultos	1,364,018	768,685	595,333	56.18	43.51	99.69
Ancianos	4,224	3,600	624	0.26	0.05	0.31
	1,368,242	**772,285**	**595,957**	**56.44**	**43.56**	**100.00**

Al cierre de diciembre 2011, el Sistema de Ahorro para Pensiones de El Salvador cuenta con alrededor de 155 mil pensionados el 45.0% corresponde a hombres y el 55.0% a las mujeres.

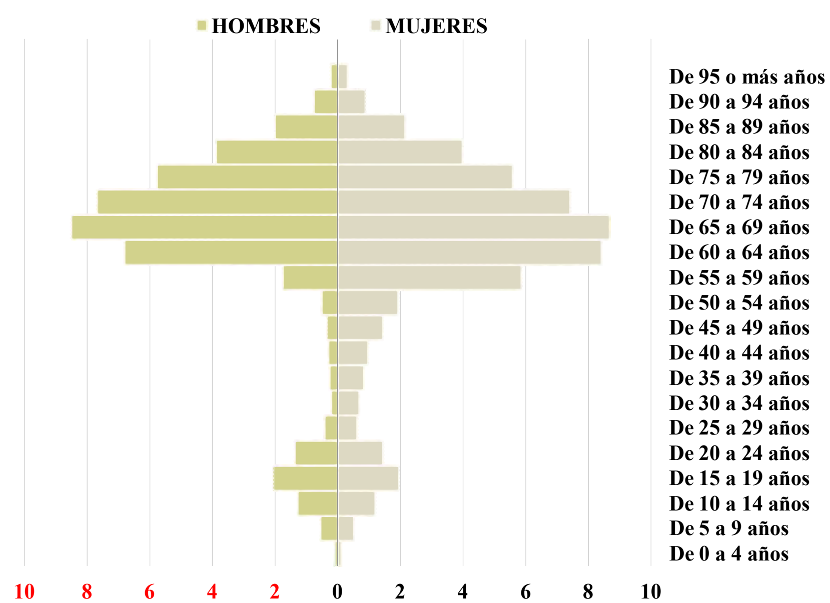
Cuadro No. 13

Población: Pensionados al Sistema de Ahorro para Pensiones, El Salvador.

2011	TOTAL	CIFRAS ABSOLUTAS		PORCENTAJE/S TOTAL	
		HOMBRES	MUJERES	HOMBRES	MUJERES
Total	**154,558**	**69,394**	**85,164**	**45**	**55**
De 0 a 4 años	362	176	186	0.11	0.12
De 5 a 9 años	1,682	873	809	0.56	0.52
De 10 a 14 años	3,845	1,981	1,864	1.28	1.21
De 15 a 19 años	6,210	3,194	3,016	2.07	1.95
De 20 a 24 años	4,386	2,135	2,251	1.38	1.46
De 25 a 29 años	1,623	664	959	0.43	0.62
De 30 a 34 años	1,397	323	1,074	0.21	0.69
De 35 a 39 años	1,706	400	1,306	0.26	0.84
De 40 a 44 años	1,976	467	1,509	0.30	0.98
De 45 a 49 años	2,759	529	2,230	0.34	1.44
De 50 a 54 años	3,788	805	2,983	0.52	1.93
De 55 a 59 años	11,797	2,720	9,077	1.76	5.87
De 60 a 64 años	23,546	10,529	13,017	6.81	8.42
De 65 a 69 años	26,569	13,157	13,412	8.51	8.68
De 70 a 74 años	23,341	11,877	11,464	7.68	7.42
De 75 a 79 años	17,538	8,914	8,624	5.77	5.58
De 80 a 84 años	12,174	6,007	6,167	3.89	3.99
De 85 a 89 años	6,449	3,107	3,342	2.01	2.16
De 90 a 94 años	2,561	1,176	1,385	0.76	0.90
De 95 o más años	849	360	489	0.23	0.32

Fuente: Superintendencia Adjunta de Pensiones, El Salvador

Gráfico No. 10



Las mujeres son en mayor número de pensionados, y hay un número considerable de pensionados con edades muy avanzadas dentro del rango de ancianos el 57.89%, en la condición de Adultos representaron el 38.30% que son precisamente las pensiones por invalidez, viudez y principalmente por vejez, en concerniente a los Niños y Jóvenes corresponden a las pensiones por sobrevivencia (huérfanos) las cuales fueron alrededor del 4.0% con 5,889 en total.

2011	Total	Hombres	Mujeres	PORCENTAJE Hombres	Mujeres	Total %
Niños y Jóvenes	5,889	3,030	2,859	1.96	1.85	3.81
Adultos	59,188	21,766	37,422	14.08	24.21	38.30
Ancianos	89,481	44,598	44,883	28.86	29.04	57.89
	154,558	**69,394**	**85,164**	**44.90**	**55.10**	**100.00**

Desde los inicios del Sistema de Ahorro para Pensiones a 2011, el sistema de pensiones ha registrado 53,146 fallecimientos, las participaciones de los hombres es bien definida ya que de cada 100 afiliados al sistema previsional 84 de ellos fan fallecido comparado con el 16.0% de las mujeres, los tramos de mayor participación son desde los 16 a 54 años.

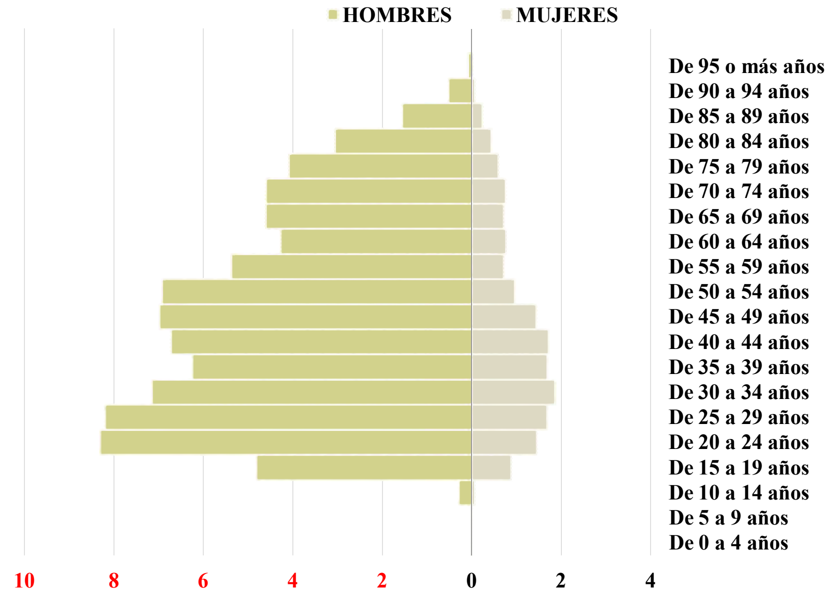
Cuadro No. 14

Población: Defunciones del Sistema de Ahorro para Pensiones, El Salvador.

1998-2011	TOTAL	CIFRAS ABSOLUTAS HOMBRES	MUJERES	PORCENTAJE/S TOTAL HOMBRES	MUJERES
Total	**53,146**	**44,542**	**8,604**	**84**	**16**
De 0 a 4 años	7	5	2	0.01	0.00
De 5 a 9 años	6	4	2	0.01	0.00
De 10 a 14 años	201	158	43	0.30	0.08
De 15 a 19 años	3,028	2,558	470	4.81	0.88
De 20 a 24 años	5,188	4,413	775	8.30	1.46
De 25 a 29 años	5,252	4,356	896	8.20	1.69
De 30 a 34 años	4,792	3,799	993	7.15	1.87
De 35 a 39 años	4,218	3,318	900	6.24	1.69
De 40 a 44 años	4,490	3,574	916	6.72	1.72
De 45 a 49 años	4,476	3,707	769	6.98	1.45
De 50 a 54 años	4,191	3,677	514	6.92	0.97
De 55 a 59 años	3,240	2,856	384	5.37	0.72
De 60 a 64 años	2,680	2,269	411	4.27	0.77
De 65 a 69 años	2,831	2,449	382	4.61	0.72
De 70 a 74 años	2,852	2,444	408	4.60	0.77
De 75 a 79 años	2,493	2,174	319	4.09	0.60
De 80 a 84 años	1,862	1,627	235	3.06	0.44
De 85 a 89 años	961	831	130	1.56	0.24
De 90 a 94 años	320	277	43	0.52	0.08
De 95 o más años	58	46	12	0.09	0.02

Fuente: Superintendencia Adjunta de Pensiones, El Salvador

Gráfico No. 11



En los Adultos hay más fallecidos en el rango de 20 a 29 años, denotándose que los afiliados que fallecen esas edades son con tasas superiores al 8.0%, en este tramo la participación de fallecidos es superior a las tres cuartas partes (78.19%), los hombres fallecidos representaron el 64.97% y las mujeres con el 13.22%.

1998-2011	Total	Hombres	Mujeres	PORCENTAJE Hombres	PORCENTAJE Mujeres	PORCENTAJE Total %
Niños y Jóvenes	214	167	47	0.31	0.09	0.40
Adultos	41,555	34,527	7,028	64.97	13.22	78.19
Ancianos	11,377	9,848	1,529	18.53	2.88	21.41
	53,146	**44,542**	**8,604**	**83.81**	**16.19**	**100.00**

Cuadro No. 15

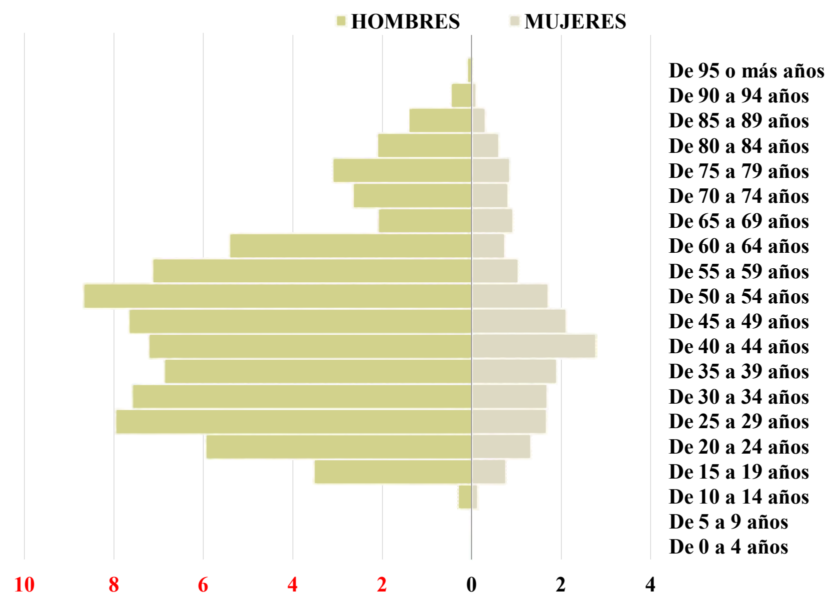
Población: Defunciones del Sistema de Ahorro para Pensiones, El Salvador.

2011	TOTAL	CIFRAS ABSOLUTAS HOMBRES	CIFRAS ABSOLUTAS MUJERES	PORCENTAJE/S TOTAL HOMBRES	PORCENTAJE/S TOTAL MUJERES
Total	**5,716**	**4,596**	**1,120**	**80**	**20**
De 0 a 4 años	2	2	0	0.03	0.00
De 5 a 9 años	2	2	0	0.03	0.00
De 10 a 14 años	26	18	8	0.31	0.14
De 15 a 19 años	246	202	44	3.53	0.77
De 20 a 24 años	416	340	76	5.95	1.33
De 25 a 29 años	551	455	96	7.96	1.68

De 30 a 34 años	531	434	97	7.59	1.70
De 35 a 39 años	502	393	109	6.88	1.91
De 40 a 44 años	572	413	159	7.23	2.78
De 45 a 49 años	559	438	121	7.66	2.12
De 50 a 54 años	594	496	98	8.68	1.71
De 55 a 59 años	468	408	60	7.14	1.05
De 60 a 64 años	353	310	43	5.42	0.75
De 65 a 69 años	173	120	53	2.10	0.93
De 70 a 74 años	199	152	47	2.66	0.82
De 75 a 79 años	227	178	49	3.11	0.86
De 80 a 84 años	156	121	35	2.12	0.61
De 85 a 89 años	99	81	18	1.42	0.31
De 90 a 94 años	33	27	6	0.47	0.10
De 95 o más años	7	6	1	0.10	0.02

Fuente: Superintendencia Adjunta de Pensiones, El Salvador

Gráfico No. 12



De acuerdo a la Superintendencia Adjunta de Pensiones de El Salvador, las defunciones para 2011 ascendieron a 5,716 distribuidos en 80.0% los Hombres (4,596) y 20.0% las mujeres (1,120), los fallecimientos siempre siguen en mayor proporción para los hombres principalmente en los tramos de edades de 15 a 64 años. La población de Adultos registró para el año en referencia el 83.83%, seguida por los Ancianos, los Niños y Jóvenes alcanzaron el medio del uno por ciento.

2011	Total	Hombres	Mujeres	PORCENTAJE Hombres	Mujeres	Total %
Niños y Jóvenes	30	22	8	0.38	0.14	0.52
Adultos	4,792	3,889	903	68.04	15.80	83.83
Ancianos	894	685	209	11.98	3.66	15.64
	5,716	**4,596**	**1,120**	**80.41**	**19.59**	**100.00**

Por su parte, la Dirección General de Estadística y Censos a nivel país muestra 15 grandes grupos de causas de muerte encontrándose entre las principales cinco causas: las ocasionadas por lesiones de causas externas con mayor predominio en el sexo masculino (principalmente por agresiones con disparo de armas de fuego), de la misma manera en la mortalidad cardiaca y la neumonía, contrariamente el comportamiento de las muertes en el sexo femenino por diabetes mellitus, situación que evidencia la violencia que afecta al país y por ende en los sistemas previsionales.

El Salvador, enfrenta una transición demográfica, como se ha expuesto en el presente apartado (ver pirámides y explicaciones de algunas variables), la ayuda internacional, los programas sociales impulsados desde las diferentes gobernanzas, las condiciones sociales y económicas, avances en la medicina y control de enfermedades, la implementación de medios de planificación familiar, la emigración de mujeres en edad fértil, son algunas de las variables que le han generado cambios en su estructura poblacional; además los hechos históricos como el período de guerra, acuerdos de Paz, remesas, renta media, ayuda internacional, le enfrentará ante una estructura más envejecida (incremento de la población mayor). Escenario que le permite modernizar sus políticas sociales, fiscales y presupuestales, a efecto de contar con herramientas actuariales contextualizadas para una toma de decisiones acertada en beneficio de la población salvadoreña actual y las futuras generaciones.

En el plano de la seguridad social, los cambios demográficos experimentados y los futuros en aumento, incrementarán la demanda por los servicios de salud y previsionales, por lo tanto El Salvador espera un aumento en los gastos en salud principalmente, el análisis antecedido nos orienta a enfocar el problema de sostenibilidad financiera de las pensiones y en los programas de salud geriátrica, derivado del envejecimiento demográfico que conlleva a una desproporción entre las población activa que será cada vez menor, y la que disfruta o disfrutará las pensiones, lo que será un desafío cada vez más difícil desde la perspectiva de su financiación, de surgir soluciones se espera que serán medidas de ajuste, las cuales tenderán a una agudización de los niveles de pobreza en las poblaciones en edades avanzadas. Para lograr las mejores proyecciones se considera importante contar mediciones biométricas idóneas las cuales se pueden viabilizar con una tabla de mortalidad que explique la verdadera mortalidad del o los colectivos en estudio.

CAPÍTULO 2. METODOLOGÍA DE GRADUACIÓN DE WHITTAKER-HENDERSON TIPO A Y B.

2.1Contexto

El siglo XIX es un espacio en el tiempo de referencia para el desarrollo de métodos de graduación de datos de las tablas actuariales, los métodos elaborados de la época se realizaron con el propósito de ajustar tasas brutas de mortalidad (aproximación de la probabilidad de que una persona de edad x fallezca dentro de un año), ello derivado por un mejoramiento en la calidad de vida de la población, el cual no se experimentaba en los siglos anteriores; en los primeros métodos desarrollados se utilizaba la aplicación de un filtro de media móvil ponderada de los datos. Los coeficientes de filtro y la longitud se determinaban por una variedad de criterios, esos métodos adolecían de dos óbices, no podían suavizar cerca de los extremos de los registros de datos de mortalidad en los tramos de 0-15 y en los tramos de 80-90 años y el grado de suavizamiento era fijo para cualquier filtro. [ii]

En el desarrollo o construcción de tablas actuariales, el análisis de supervivencia es un tema importante en donde la ciencia actuarial es la directamente involucrada, dicho análisis tiene una larga historia y hay muchos tipos de enfoques. Un enfoque común para estimar la distribución de la supervivencia puede ser no paramétrica, en donde la graduación de los datos es de gran importancia en el análisis de supervivencia; en la graduación intervienen dos elementos importantes, la suavidad y la bondad de ajuste, los cuales son dos requisitos fundamentales para la graduación.

Para el desarrollo del presente apartado la graduación se realizará a los datos de la población de El Salvador de acuerdo al Censo de 2007, el método a utilizar es el Whittaker-Henderson Tipo B, (no obstante que para fines ilustrativos se realizará el Tipo A), éste método tiene su origen en el trabajo de Bohlmann (1899) [iii] y Whittaker (1923) [iv], y las contribuciones a la teoría fueron realizadas por Henderson (1924, 1925) [v], y otros.

2.2 Consideraciones previas al enfoque de graduación

Es preciso desde el comienzo de la presente investigación aclarar la etimología de graduación, de acuerdo a Andrews y Nesbitt (1965) [vi] la consideran un “esfuerzo por representar un fenómeno físico a través de una revisión sistemática de algunas observaciones de ese fenómeno”. Otros autores como Haberman y Renshaw (1996) [vii] definen la graduación como “el conjunto de principios y métodos por los cuales probabilidades observadas se suavizan con el fin de llevar a cabo inferencias y cálculos actuariales”. Ese esfuerzo de representar un fenómeno, conlleva implícito un objetivo y es el de efectuar una revisión de valores observados con el propósito de generar valores que mejoran una representación de los datos, en sí es un proceso iterativo de rectificación o cambio que se produce en una secuencia de estimaciones iniciales.

Tomando prestados los conceptos de Kimeldorf y Jones (1967) [viii] consideran que la graduación “no es meramente un suavizado, sino que un proceso de estimación de las verdaderas tasas de mortalidad que realmente prevalecen en la población”. Así se puede afirmar, tal y como considera Whittaker (1923) [ix], que el estudio de la graduación “pertenece esencialmente a la Teoría Matemática de la Probabilidad”.

En esas líneas de ideas, la graduación es ubicada en un contexto del ámbito estadístico, con esquemas aleatorios y elementos importantes de inferencia estadística.

En algunos casos y posiblemente por las traducciones al castellano, el concepto de graduación se le conoce como suavización (alisamiento), éste concepto es menos riguroso o diferente que el de graduación en un análisis secuencia de datos, en todo caso ambos conceptos se consideran que son válidos para los fines prácticos de los objetivos a seguir, no obstante el término graduación es considerado o tiene una idea más general que refleja todos los elementos de cálculo o estimación de ajustar las tasas brutas de mortalidad; por lo tanto, es un problema matemático en el que se operan cálculos para obtener una representación de una serie de tasas verdaderas de mortalidad (tasa bruta de mortalidad), que dan lugar a la serie irregular de las probabilidades que se observan en un determinado colectivo; no obstante, la aclaración entre los términos de graduación y los mecanismos de suavizamiento o alisamiento, lo describen muy bien autores como London, D. (1985) que “se reconoce la validez del objetivo de alisamiento, pero se expande la idea hacia el concepto más general que refleja todos los elementos de opinión previa en un proceso de graduación”. [x]

El proceso de graduación consiste en revisar la secuencia de los valores observados de las tasas brutas de mortalidad con el fin de producir una mejor representación de la mortalidad, en sí es un proceso de rectificación o cambio de una secuencia de estimaciones iniciales.

Generalmente un proceso de graduación tiene dos etapas bien definidas, siendo la primera la obtención de las estadísticas de datos observados de fallecidos y expuestos al riesgo de fallecimiento (personas vivas); segunda, es la graduación de los mismos, con la realización de esas dos etapas, se llega a obtener resultados de una mejor representación implícita de graduación que subyace de acuerdo a un criterio previamente establecido. Así, con la graduación no sólo se obtiene una "curva suave” sino, más bien, las muertes más probables. Es decir, de acuerdo a la estadística observada de la tasa bruta de mortalidad (Fallecidos/Expuestos), se estiman las verdaderas tasas que realmente prevalecen en la población en estudio. Así la idea que está detrás o subyacente de las diferentes metodologías de graduación es, minimizar o reducir la variabilidad, lo que permite estudiar y analizar los datos observados de las tasas brutas de mortalidad donde las fluctuaciones no deseadas se puedan excluir del estudio actuarial de las tablas de mortalidad.

En los tiempos actuales, en la construcción y modelación de tablas mortalidad se considera importante partir una premisa fundamental, de sí una tabla de mortalidad reviste la característica de ser una modelación paramétrica o no paramétrica; para el desarrollo de la presente investigación y para analizar la supervivencia de los partícipes de El Salvador, se presenta un método no paramétrico para estimar las tendencias de mortalidad, donde se combinan la bondad del ajuste y la suavidad del método de Whittaker-Henderson, esta línea de investigación está conforme al objetivo central planteado, que es el de desarrollar una propuesta de metodología de construcción de tablas actuariales, sobre la base sistemática de Whittaker-Henderson Tipo B, la metodología a desarrollar brinda dos puntos de vista importantes, siendo el primero la bondad del ajuste y un segundo, la suavidad en la graduación de los datos.

En la utilización de técnicas basadas en métodos paramétricos o no paramétricos, usar uno u otro de esos métodos dependerá de la estrategia de graduar y de la disponibilidad de las probabilidades brutas de fallecimiento (estadísticas), en las denominadas técnicas de graduación la finalidad principal consiste en disminuir la variabilidad y facilitar el análisis de supervivencia, su técnica consiste en modificar los datos observados de fallecimientos y expuestos, mediante procedimientos que permitan obtener resultados y análisis de una nueva serie de tasas de fallecimientos sobre expuestos en donde se eliminen las fluctuaciones no deseadas.

2.3 Enfoque estadístico y análisis de la información

En elaboración de tablas de mortalidad es evidente la relación que se observa entre la graduación y la ciencia actuarial; principalmente cuando se tiene en mente una metodología de graduación no paramétrica, además, la graduación tiene un estrecho vínculo con el estudio estadístico que relaciona métodos que tratan con la información de datos cualitativos o numéricos.

La primera etapa de la graduación es la obtención de la información estadística (base de datos) de la población fallecida y los expuestos al riesgo de morir, generalmente cuando el objeto de estudio son las poblaciones de los sistemas previsionales, la base de datos es obtenida de fuentes de información como, la población de Activos y Pensionados, otra fuente importante son los programas de salud que registran subsidios de sepelio; y, en algunos casos es factible obtener información de las sociedades de seguros en los productos vinculantes con los sistemas previsionales (Rentas Vitalicias, Seguro de Invalidez y Sobrevivencia, etc.).

2.4 Fuentes de información y su metodología

El tipo de investigación se centrará en los registros de defunciones y población expuesta de fallecimiento de la población censada de 2007 de El Salvador (Ver Anexo No. 3), se considerarán los registros de defunción bruta, desagregada en edades completas, distribuidas en años, género, estatus de pensionado y activos y distribución de las muertes por tipo de pensión. El método a utilizar será la función de supervivencia Whittaker-Henderson Tipo A y B, el cual es utilizado para tasas de mortalidad mediante el suavizamiento de probabilidades, el procedimiento consiste en minimizar expresiones considerando el Tipo B.

Concretamente, las etapas a seguir en la investigación son: a) Obtención de datos (defunciones y expuestos), b) Cálculo de expuestos y determinación de las tasas butas de mortalidad, c) Graduación de tasas brutas de mortalidad; y, d) Análisis de los resultados obtenidos. Para los fines de la investigación, se adoptará la práctica de construir Tablas de Actuariales, estimado en los tantos de mortalidad (q_x), y calculando posteriormente las demás columnas a partir de q_x, siguiendo los procedimientos actuariales, que permitan calcular nuevas series de datos más suaves que la calculada originalmente, para ello, se utilizarán las metodologías de Whittaker-Henderson Tipo A y B, para representar la mortalidad de la población de Pensionados y Activos Cotizantes del SAP y del SPP.

El suavizamiento que también se le denomina graduación de la mortalidad, permiten ajustar las tasas brutas de mortalidad, de forma que las nuevas probabilidades permitan realizar cálculos actuariales donde se han eliminado las fluctuaciones aleatorias que perturban las estimaciones iniciales. El resultado de la graduación de tasas de fallecimientos iniciales (o brutas), serán las verdaderas probabilidades de fallecimiento que cumplen ciertas condiciones de graduación y ajuste, y se supone que las verdaderas probabilidades de fallecimiento son similares para edades próximas y que de una edad a otra no hay saltos bruscos.

2.5 Fórmula de Whittaker E. T. (1923) y Henderson, R. (1924).

A continuación se detallarán los tres enfoques de la graduación, con éstos se pretende producir un modelo de supervivencia que sea la mejor estimación del verdadero “modelo” que sigue la mortalidad de una determinada población, siendo el colectivo específico de estudio la población de afiliados al Sistema para Pensiones de El Salvador. Para ello, existen distintos métodos y autores.

Para el presente apartado se han tomado prestados los conceptos y metodología de Caballero (2004) [xi], el desarrollo es el siguiente:

CAPÍTULO 3. MÉTODO DE AJUSTE WHITTAKER-HENDERSON TIPO A Y B.

3.1 Fórmula Tipo A.

A efectos ilustrativos la fórmula de Whittaker-Henderson Tipo A, se puede suponer que $w_x = 1$, éste recurso de simplificación permite encontrar sin mayor dificultad la solución mediante el método de las ecuaciones en diferencia desarrollados por los dos autores antes mencionados. El mecanismo de que realiza las ecuaciones que resultan al minimizar la siguiente expresión general:

$$M = \sum_{x=1}^{n} w_x \left(q''_{xt} - q_{xt}\right)^2 + h \sum_{x=1}^{n} \left(\Delta^z q''_{xt}\right)^2$$

Donde:
W_x= Coeficiente de Ponderación
q_{xt}: tasa bruta de mortalidad; valor observado al momento t,
q''_{xt}: se refiere a la tasa de mortalidad ajustada , al momento t
Δ^z= Diferencias finitas de orden z, siendo z generalmente 2 ó 3
h= Regula la importancia que se asigna a la suavidad

La primera suma de la expresión anterior, mide la proximidad entre las tasas suavizadas y las originales (tasa bruta de mortalidad), por lo tanto mide la fidelidad (ajuste) de los datos, w_x es un coeficiente de peso (Weight) ponderado de las desviaciones cuadráticas asignando pesos distintos a cada desviación; y, la segunda sumatoria es una medida de la suavidad, donde h es un factor de ajuste positivo entre la bondad de ajuste y la suavidad, asimismo, h es considerada como un elemento de control de la importancia relativa que se le atribuye a los dos sumandos de la expresión, una cualidad necesaria que sirve para dar mayor o menor relevancia a la suavidad sobre el ajuste o viceversa.

Para efectos ilustrativos se desarrollará un ejemplo utilizando las probabilidades de muerte de la tabla de mortalidad denominada RV H ES, que es la que se utiliza en el Sistema de Ahorro para Pensiones de El Salvador para los colectivos de Activos y pensionados. No obstante que la tabla llega considera edades de $(0, \omega - 110)$, el infinito actuarial para los cálculos a desarrollar, se delimitará de $(0, \omega - 99)$.

A efectos de simplificar el cálculo del método de Whittaker-Henderson Tipo A, se adopto el supuesto que $w_x = 1$, esta simplificación permite encontrar una solución sin mayores complicaciones en el cálculo de suavizamiento.

Las ecuaciones a estimar serán las resultantes de la fórmula antes detallada, previo a ello el primer paso para calcular los valores suavizados se realiza de acuerdo a la siguiente expresión:

$$q_x = \frac{2a}{a+1} q_{x+1} - \frac{a}{a+2} q_{x+2} + \frac{2}{(a+1)(a+2)} q'_x$$

En la expresión anterior q'_x es un valor auxiliar y a está relacionado vinculantemente con la siguiente expresión:

$$k = \frac{1}{4} a(a+1)^2(a+2)$$

Dependiendo del grado de las diferencias que se adopte, así son los cálculos al estimar el suavizamiento de la expresión general, para el siguiente cálculo es sobre la base de la siguiente:

$$q'_x = \frac{2a}{a+1} q'_{x-1} - \frac{a}{a+2} q'_{x-2} + \frac{2}{(a+1)(a+2)} q''_x$$

Y así sucesivamente, llegado a este espacio es importante determinar que los valores estimados del inicio de la tabla edad 0 y la edad 110, tienen un tratamiento distinto, para calcular el primer valor de q'_{xt}, no se cuenta con un valor anterior a 0 o sea q_{xt}, de igual forma se dan problemas de cálculo para el valor extremo de la edad 110, obsérvese cómo se resuelven los inconvenientes encontrados de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$q'_{u-2} = q'_u - (a+2)\Delta q''_u$$
$$q'_{u-1} = q''_{u+1} - (a+2)\Delta q''_u$$

En cuanto al cálculo de los valores de 109 y 110 se estiman mediante las relaciones:

$$q_{v-1} = q'_v - a\Delta q'_{v-1}$$
$$q_v = q'_v - a\Delta q'_{v-1}$$

De conformidad al enunciado de utilizar la RV ES H, a continuación se realizará el siguiente ejemplo:

Los cálculos de los valores suavizados inician de q'_0 a q'_{110}, expresados en $u = 0$ y $v = 110$, adoptando el supuesto de que $a = 3$, para lograr una simplificación las probabilidades de q_x se multiplicaron por 1,000,000

MÉTODO DE WHITTAKER-HENDERSON TIPO "A"

Tabla de Probabilidades Suavizadas

***a* =**	3	Dato
***k* =**	60	=(1/4)*(3)*(3+1)^2*(3+2)

Edad	q_x (RV H ES)*	q'_x	Desarrollo:	q''_x	Desarrollo:
0	**330**	290	=340-(3+2)*(350-340)		
1	**330**	300	=350-(3+2)*(350-340)		
2	**340**	310	=(2*3)/(3+1)*310-(3/(3+2))*300+2/((3+1)*(3+2))*350	**335**	=(2*3)/(3+1)*344-(3/(3+2))*353+2/((3+1)*(3+2))*310
3	**350**	329	=(2*3)/(3+1)*320-(3/(3+2))*310+2/((3+1)*(3+2))*350	**344**	=(2*3)/(3+1)*353-(3/(3+2))*362+2/((3+1)*(3+2))*320
4	**350**	338	=(2*3)/(3+1)*329-(3/(3+2))*320+2/((3+1)*(3+2))*360	**353**	=(2*3)/(3+1)*362-(3/(3+2))*371+2/((3+1)*(3+2))*329
5	**360**	347	=(2*3)/(3+1)*338-(3/(3+2))*329+2/((3+1)*(3+2))*370	**362**	=(2*3)/(3+1)*371-(3/(3+2))*381+2/((3+1)*(3+2))*338
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**
104	**443,800**	359,731	=(2*3)/(3+1)*334369-(3/(3+2))*310337+2/((3+1)*(3+2))*443800	**446,952**	=(2*3)/(3+1)*487476-(3/(3+2))*533725+2/((3+1)*(3+2))*359731
105	**474,260**	386,401	=(2*3)/(3+1)*359731-(3/(3+2))*334369+2/((3+1)*(3+2))*474260	**487,475**	=(2*3)/(3+1)*533725-(3/(3+2))*586254+2/((3+1)*(3+2))*386401
106	**505,740**	414,337	=(2*3)/(3+1)*386401-(3/(3+2))*359731+2/((3+1)*(3+2))*505740	**533,726**	=(2*3)/(3+1)*586254-(3/(3+2))*645148+2/((3+1)*(3+2))*414337
107	**538,080**	443,473	=(2*3)/(3+1)*414337-(3/(3+2))*386401+2/((3+1)*(3+2))*538080	**586,254**	=(2*3)/(3+1)*645148-(3/(3+2))*709693+2/((3+1)*(3+2))*443473
108	**571,110**	473,718	=(2*3)/(3+1)*443473-(3/(3+2))*414337+2/((3+1)*(3+2))*571110	**645,149**	=(2*3)/(3+1)*709694-(3/(3+2))*777940+2/((3+1)*(3+2))*473718
109	**604,610**	504,954	=(2*3)/(3+1)*473718-(3/(3+2))*443473+2/((3+1)*(3+2))*604610	**709,693**	=504955+3*(573201-504955)
110	**1,000,000**	573,202	=(2*3)/(3+1)*504955-(3/(3+2))*473718+2/((3+1)*(3+2))*1000000	**777,939**	=573201+3*(573201-504955)

* Elaboración Propia. Tabla de Mortalidad utilizada para efectos ilustrativos.

3.2 Fórmula Tipo B.

El método de Whittaker-Henderson presenta los valores graduados al minimizar la siguiente expresión, siendo esta:

$$M = \sum_{x=1}^{n} w_x \, (q''_{xt} - q_{xt})^2 + h \sum_{x=1}^{n} (\Delta^z q''_{xt})^2$$

En términos generales, las características de los diferentes métodos de graduación de la secuencia de los datos originales, puede realizarse sobre la base dos procedimientos; primero, poniendo énfasis diferente en la bondad de ajuste y suavidad, y segundo, sobre la forma de medir la suavidad y bondad del ajuste. Por lo tanto, la graduación de los datos originales puede ser vista como una cuestión de doble objetivo. Por un lado, los resultados de la graduación deben estar cerca de los datos originales y por otra parte deben presentar patrones de suavizamiento.

Para el desarrollo del presente apartado, la formulación anterior será reescrita con el propósito de adaptarla a los fines de la presente investigación. Siempre considerando como objetivo el de minimizar una función que combine los criterios de ajuste y suavidad.

$$M = F + hS$$

$$F = \sum_{x=1}^{n} w_x \, (q'_{xt} - q^0_{xt})^2 \qquad\qquad S = h \sum_{x=1}^{n-z} (\Delta^z q'_{xt})^2$$

Donde:

F : (fit) : representa la medida de ajuste
S : (smooth) : es una medida de suavidad de la curva,
w_x : coeficiente de ponderación (Peso)
h : parámetro que le da mayor o menor intensidad a la curva

q^0_{xt} : tasa bruta de mortalidad; valor observado de q_{xt},
q'_{xt} : se refiere a la tasa de mortalidad ajustada , al momento t
Δ^z : diferencias finitas de orden z.

Donde F y S son medidas ponderadas de la bondad del ajuste a los datos originales y suavidad respectivamente, el primer término *F (fit)*: es la parte de la fórmula que asocia una minimización de residuos al cuadrado, el cual mide la proximidad entre las tasas graduadas y las originales (tasas brutas de mortalidad), dependiendo del tamaño de la muestra o la población del colectivo en estudio, ésta fórmula esta ponderando los residuos $(q'_{xt} - q^0_{xt})^2$, es decir tiene una relación directa y mientras el valor de F tienda a cero el ajuste es mejor. En cambio S es un factor de ajuste positivo entre la bondad del ajuste y la suavidad.

El método Whittaker-Henderson, ha sido ampliamente utilizado y se ha convertido en una lógica básica en la graduación de datos de tasas brutas de mortalidad, hoy en día los actuarios de los países como Estados Unidos y Francia entre otros, están utilizando este enfoque para la construcción de tablas actuariales. El enfoque de esos dos autores se basa en la minimización de dos criterios:

Criterio de Fidelidad: $$F = \sum_{x=1}^{n} w_x \, (q'_{xt} - q^0_{xt})^2$$

Criterio de Regularidad: $$S = h \sum_{x=1}^{n-z} (\Delta^z q'_{xt})^2$$

Definición de los parámetros: w_x, Δ^z y z:

Donde w_x es un conjunto de pesos y z es un parámetro a ser ajustado por el usuario, la tasas suavizadas se obtienen después de minimizar la combinación lineal de los dos criterios, a este enfoque se le conoce como *"Fórmula de Wittaker-Henderson, Tipo B"*, la resolución del sistema se realiza por medio de matrices, como podrá advertirse la fórmula Tipo B, es un procedimiento que requiere un mayor análisis, para efectos de realizar el presente apartado, primero se desarrollará la explicación de la metodología del conjunto de los pesos, en donde la forma de establecer las ponderaciones es mediante la siguiente expresión:

$$W_x = \frac{E_x}{q^0_{xt}} * (1 - q^0_{xt})$$

Donde:

E_x : Representa la población N_x expuesta al riesgo de muerte.

En cuanto al segundo criterio de Regularidad se refiere a un factor de ajuste que es considerado como una cualidad necesaria que mide la suavidad de las secuencia de las estimaciones rectificadas, conocido como z, es un número real positivo es un parámetro de control de la importancia relativa que se atribuye al segundo criterio. En las tablas actuariales, las edades de q_x son variables discretas, por lo que sólo toma valores enteros que siempre pueden numerarse: 0, 1, 2, 3, 4, 5 etc., hasta una edad extrema ω, así el intervalo queda [0, ω[con valores R^+, de modo que la función incógnita es una sucesión (función con dominio en los números naturales) cuyos términos pueden numerarse y por lo tanto se pueden operar diferencias entre el primer término y el segundo, entre el segundo y el tercero, y así sucesivamente, de esta forma se utiliza la metodología de las diferencias de Δ^z.

Si $q_t = q(t)$ es una sucesión, se define la diferencia primera de q_t como:

$$\Delta q_t \equiv q_{t+1} - q_t$$

La diferencia segunda, o diferencia de orden 2, es la diferencia de la diferencia primera, que se define como:

$$\Delta^2 q_t \equiv \Delta(\Delta q_t) \equiv \Delta(q_t - q_t) \equiv (q_{t+2} - q_{t+1}) - (q_{t+1} - q_t) \equiv q_{t+2} - 2q_{t+1} + q_t$$

Para la diferencia tercera:

$$\Delta^3 q_t \equiv \Delta(\Delta^2 q_t) \equiv \Delta(q_{t+2} - 2q_{t+1} + q_t) \equiv q_{t+3} - 3q_{t+2} + 3q_{t+1} - q_t$$

El Δ se le denomina operador diferencia que bien se puede aplicar a la variable entera de $\mathrm{q_t}$, la cual indica que debe restarse el valor de la función en ese período del valor en el siguiente período, así de forma general la diferencia finita de orden n se define como:

$$\Delta^n f_t = \Delta^{n+1} f_t = \Delta^{n-1} f_{t+1} - \Delta^{n+1} f_t$$

Donde $n \geq 1$ y $\Delta^0 f_t = f_t$

3.3 Resolución de Matrices

Con el desarrollo de $\mathrm{w_x}$ y Δ^{z} se da el inicio de la etapa de proceso para la construcción de tablas actuariales con la fórmula Whittaker-Henderson Tipo B, en términos generales la metodología que se aplica es mediante resoluciones de matrices que tienen el propósito de suavizar las incógnitas q_{xt} de conformidad a la siguiente expresión:

$$(W + k * K^T K) * q = W * q^{\,0}$$

Donde:

W: Matriz diagonal n x n, cuyos elementos son las ponderaciones $W_1, W_2, \ldots, W_n$
K : Matriz (n-z) x n que contiene los coeficientes de las diferencias de orden *z* de q_x.
q_{xt}^0: Vector de las probabilidades de muerte no suavizadas.
q_{xt} : Vector de valores suavizados

Primera Matriz que se denominará: K, es una matriz de diferenciación donde K por ejemplo puede adquirir los valores siguientes:

$z = 2 \; y \; n = 10$

$$
M = \begin{bmatrix}
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$z = 3 \; y \; n = 10$

$$
M = \begin{bmatrix}
-1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix}
$$

Los ejemplos de las matrices anteriores se obtuvieron a partir del desarrollo los coeficientes de las siguientes diferencias:

Diferencias de Orden: Uno	**Diferencias de Orden: Dos**	**Diferencias de Orden: Tres**	**Diferencias de Orden: Cuatro**
$\Delta_1 = q_2 - q_1$	$\Delta_1^2 = \Delta_2 - \Delta_1$	$\Delta_1^3 = \Delta_2^2 - \Delta_1^2$	$\Delta_1^4 = \Delta_2^3 - \Delta_1^3$
$\Delta_2 = q_3 - q_2$	$\Delta_2^2 = \Delta_3 - \Delta_2$	$\Delta_2^3 = \Delta_3^2 - \Delta_2^2$	$\Delta_2^4 = \Delta_3^3 - \Delta_2^3$
$\Delta_3 = q_4 - q_3$	$\Delta_3^2 = \Delta_4 - \Delta_3$	$\Delta_3^3 = \Delta_4^2 - \Delta_3^2$	$\Delta_3^4 = \Delta_4^3 - \Delta_3^3$
$\Delta_4 = q_5 - q_4$	$\Delta_4^2 = \Delta_5 - \Delta_4$	$\Delta_4^3 = \Delta_5^2 - \Delta_4^2$	$\Delta_4^4 = \Delta_5^3 - \Delta_4^3$
$\Delta_5 = q_6 - q_5$	$\Delta_5^2 = \Delta_6 - \Delta_5$	$\Delta_5^3 = \Delta_6^2 - \Delta_5^2$	$\Delta_5^4 = \Delta_6^3 - \Delta_5^3$
$\Delta_6 = q_7 - q_6$	$\Delta_6^2 = \Delta_7 - \Delta_6$	$\Delta_6^3 = \Delta_7^2 - \Delta_6^2$	$\Delta_6^4 = \Delta_7^3 - \Delta_6^3$
$\Delta_7 = q_8 - q_7$	$\Delta_7^2 = \Delta_8 - \Delta_7$	$\Delta_7^3 = \Delta_8^2 - \Delta_7^2$	$\Delta_7^4 = \Delta_8^3 - \Delta_7^3$
$\Delta_8 = q_9 - q_8$	$\Delta_8^2 = \Delta_9 - \Delta_8$	$\Delta_8^3 = \Delta_9^2 - \Delta_8^2$	
$\Delta_9 = q_{10} - q_9$	$\Delta_9^2 = \Delta_{10} - \Delta_9$		
$\Delta_{10} = q_{11} - q_{10}$			

En el grado de orden de los cuatro ejemplos anteriores cada vez que se estima una diferencia de orden se pierde el valor de un dato, para el caso de la diferencia de orden tres se pierden dos datos; sobre la base de esta línea para estimar n diferencias de orden se necesita $n + 1$ datos derivado de ello es que las matrices a desarrollar tienen dimensiones de $(n - z)\, x\, n$. El propósito de utilizar el un grado de orden de diferencias, es demostrar que tan próximos están los valores graduados con los datos de la tasa bruta de mortalidad.

Para comprender el desarrollo de las matrices, se realizará de forma parcial un ejercicio numérico el cual utilizará los datos estadísticos de El Salvador que para la población masculina expuesta es el Censo 2007, y las defunciones del mismo año, el ejercicio completo comprende un rango de q_0.a q_{99}, de conformidad al siguiente detalle:

Cuadro No. 16

EL SALVADOR: POBLACIÓN OBJETIVO DE EXPUESTOS Y FALLECIDOS

	Población Expuesta			Defunciones			Tasas Crudas			PESO		
Edad	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total
0	51,787	50,097	**101,884**	579	402	**981**	0.01118041	0.00802443	0.00962860	458	619	1,077
1	53,230	51,477	**104,707**	76	68	**144**	0.00142777	0.00132098	0.00137527	3,723	3,892	7,615
2	55,845	54,261	**110,106**	36	23	**59**	0.00064464	0.00042388	0.00053585	8,657	12,796	21,453
3	59,752	57,127	**116,879**	21	20	**41**	0.00035145	0.00035010	0.00035079	16,995	16,312	33,307
4	62,658	59,659	**122,317**	27	15	**42**	0.00043091	0.00025143	0.00034337	14,535	23,722	38,257
5	62,274	59,738	**122,012**	17	18	**35**	0.00027299	0.00030132	0.00028686	22,806	19,820	42,626
6	69,088	66,249	**135,337**	27	14	**41**	0.00039081	0.00021132	0.00030295	17,671	31,343	49,014
7	75,310	72,672	**147,982**	23	13	**36**	0.00030540	0.00017889	0.00024327	24,652	40,617	65,269
8	71,525	68,511	**140,036**	21	16	**37**	0.00029360	0.00023354	0.00026422	24,354	29,329	53,683
9	70,953	68,407	**139,360**	14	16	**30**	0.00019731	0.00023389	0.00021527	35,952	29,240	65,193
::::::::												
85	3,263	4,413	**7,676**	266	334	**600**	0.08152007	0.07568547	0.07816571	4	5	9
86	3,096	4,286	**7,382**	252	329	**581**	0.08139535	0.07676155	0.07870496	3	5	9
87	2,750	3,758	**6,508**	246	270	**516**	0.08945455	0.07184673	0.07928703	3	5	8
88	1,767	2,358	**4,125**	219	264	**483**	0.12393888	0.11195929	0.11709091	1	2	3
89	1,595	2,219	**3,814**	213	238	**451**	0.13354232	0.10725552	0.11824856	1	2	3
90	1,405	2,091	**3,496**	162	236	**398**	0.11530249	0.11286466	0.11384439	1	2	3

Fuente: Dirección General de Estadística y Censos

El proceso de graduación comienza a partir del análisis de la matriz K, utilizando la dimensión de $n = 100\ y\ z = 2$, para realizar el presente cálculo retomaremos la siguiente expresión $(W + k * K^T K) * q = W * q^{\,0}$.

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos de filas y columnas, cada posición contiene subíndices, el primero generalmente se representa por i que designa el número de filas en el cual está posicionado el elemento, el segundo subíndice j se le designa la columna. Las operaciones matriciales son cuadradas donde $n = m$.

Matriz $\boldsymbol{k * K^T K}$:

Primer Paso de construcción de la matriz K: Se retoma la matriz de diferencias de orden $z = 2$; donde la dimensión es $(n - z)\, x\, n$, la cual se transpone y multiplica por K, posteriormente se multiplica cada elemento por el escalar k que se denomina: Importancia del Suavizamiento.

$$K=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

La diferencia segunda, o diferencia de orden 2, es la diferencia de la diferencia primera, que se define como:

$$\begin{aligned} \Delta^2 q_t \equiv \Delta(\Delta q_t) \equiv \Delta(q_t - q_t) &\equiv (q_{t+2} - q_{t+1}) \\ &- (q_{t+1} - q_t) \\ &\equiv q_{t+2} - 2q_{t+1} + q_t \end{aligned}$$

Reordenando: $q_t - 2q_{t+1} + q_{t+2}$

Segundo paso: Se transpone la matriz K cuyo resultado es:

$$K^T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tercer paso: Se multiplican las matrices anteriores $K^T K$. Es importante verificar el orden de la multiplicación (debido a la no conmutatividad de las matrices), en donde el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz.

$$K^T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cuarto paso: Se multiplica $k * K^T K$, donde k=Importancia del suavizamiento, para nuestro caso de ejemplo es 1000.

$$
kK^TK = \begin{bmatrix}
100 & -200 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-200 & 500 & -400 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
100 & -400 & 600 & -400 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 100 & -400 & 600 & -400 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 100 & -400 & 600 & -400 & 100 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 100 & -400 & 600 & -400 & 100 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 100 & -400 & 600 & -400 & 100 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & -400 & 600 & -400 & 100 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & -400 & 600 & -400 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & -400 & 600
\end{bmatrix}
$$

Con el desarrollo anterior se termina el primer procedimiento, utilizando las diferencias de orden 2 y la importancia del suavizamiento de 1000, aplicando el criterio de Regularidad.

Matriz W:

Quinto Paso: El siguiente procedimiento consiste en desarrollar la matriz W, éste consiste en introducir los pesos en una matriz centrosimétrica, de acuerdo al siguiente detalle:

$$
W = \begin{bmatrix}
4580 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 37229 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 86574 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 169955 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 145346 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 228058 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 176714 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 246516 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 243539 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 359524 & \dots & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.352
\end{bmatrix}
$$

Es importante recordar que $W_x = E_x / q_{xt}^0 * (1 - q_{xt}^0)$, fue desarrollado en un principio.

Matriz $K + W$:

Sexto paso: Realizadas las operaciones matriciales anteriores, se procede ahora sumar la matrices $K + W$, el resultado obtenido es el siguiente:

$$K+W=\begin{bmatrix}
5580 & -2000 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
-2000 & 42229 & -4000 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
1000 & -4000 & 92574 & -4000 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1000 & -4000 & 175955 & -4000 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1000 & -4000 & 151346 & -4000 & 1000 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1000 & -4000 & 234058 & -4000 & 1000 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & -4000 & 182714 & -4000 & 1000 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & -4000 & 252516 & -4000 & 1000 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & -4000 & 249539 & -4000 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & -4000 & 365524 & \dots & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 5001 & -2000 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2000 & 1000
\end{bmatrix}$$

Matriz INV$(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{W})$:

Séptimo paso: se procede a realizar la inversa de $(K+W)$, como estamos desarrollando calculo de matrices cuadradas y no singulares; existe su inversa, cuyo resultado es:

$$INV(K+W)=\begin{bmatrix}
0.000182539 & 0.00000849 & -0.00000161 & -0.00000008 & 0.00000001 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & \dots & \dots & 0 \\
0.000008495 & 0.00002418 & 0.00000095 & -0.00000012 & -0.00000001 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & \dots & \dots & 0 \\
-0.000001609 & 0.00000095 & 0.00001087 & 0.00000024 & -0.00000007 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & \dots & \dots & 0 \\
-0.000000085 & -0.00000012 & 0.00000024 & 0.00000569 & 0.00000015 & -0.00000002 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & \dots & \dots & 0 \\
0.000000008 & -0.00000001 & -0.00000007 & 0.00000015 & 0.00000661 & 0.00000011 & -0.00000003 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & \dots & \dots & 0 \\
0.000000001 & 0.00000000 & 0.00000000 & -0.00000002 & 0.00000011 & 0.00000428 & 0.00000009 & -0.00000002 & 0.00000000 & 0.00000000 & \dots & \dots & 0 \\
0.000000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & -0.00000003 & 0.00000009 & 0.00000548 & 0.00000009 & -0.00000002 & 0.00000000 & \dots & \dots & 0 \\
0.000000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & -0.00000002 & 0.00000009 & 0.00000396 & 0.00000006 & -0.00000001 & \dots & \dots & 0 \\
0.000000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & -0.00000002 & 0.00000006 & 0.00000401 & 0.00000004 & \dots & \dots & 0 \\
0.000000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & -0.00000001 & 0.00000004 & 0.00000274 & \dots & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0.11866631 & 0.13759719 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.13759719 & 0.16279489
\end{bmatrix}$$

Los últimos dos procedimientos son:

Matriz $(\boldsymbol{W} * \boldsymbol{Qn})$:

Octavo paso: Consiste en multiplicar el vector columna $\{W\}$ de las tasas brutas a la edad x, por el respectivo peso.

Matriz de RESULTADOS:

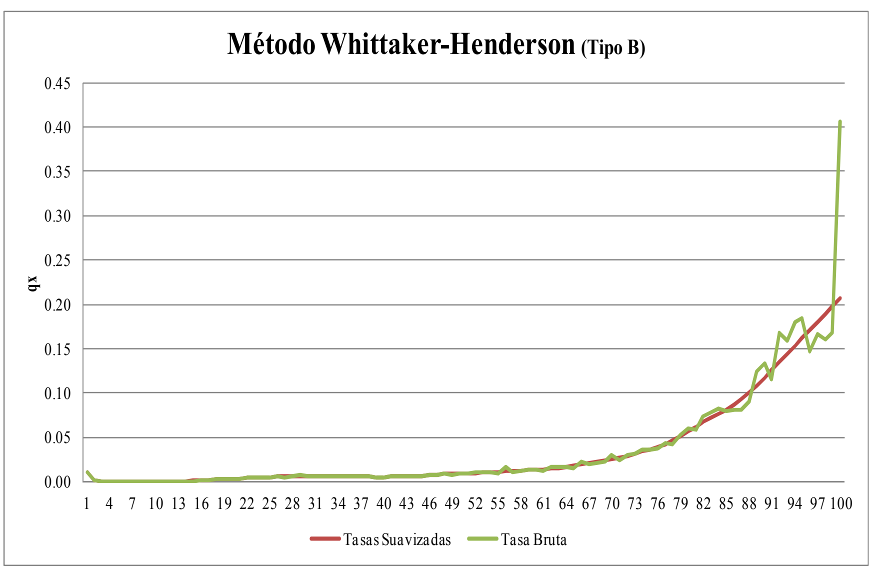
Noveno paso: llegado a este punto encontramos los valores graduados, mediante la multiplicación de las operaciones matriciales INV$(K+W)$ por $(W*Q)$, y el resultado final es:

Edad	Tasa Bruta de Mortalidad	Peso	WQx
0	0.011180412	4,580.15	51.208
1	0.001427766	37,228.78	53.154
2	0.000644641	86,573.71	55.809
3	0.000351453	169,954.61	59.731
4	0.000430911	145,345.67	62.631
5	0.000272987	228,058.38	62.257
6	0.000390806	176,714.31	69.061
7	0.000305404	246,515.82	75.287
8	0.000293604	243,539.22	71.504
9	0.000197314	359,523.92	70.939
.....			
90	0.115302491	10.78	1.243
91	0.167938931	3.89	0.654
92	0.158595642	4.38	0.695
93	0.179791976	3.07	0.552
94	0.184257603	2.47	0.456
95	0.147302905	2.79	0.411
96	0.165865385	2.09	0.347
97	0.16011236	1.87	0.299
98	0.168421053	1.41	0.237
99	0.406639004	0.35	0.143

Edad	Tasas Bruta de Mortalidad	Tasas Graduadas
0	0.011180412	0.009704749
1	0.001427766	0.001765437
2	0.000644641	0.000584887
3	0.000351453	0.000350795
4	0.000430911	0.000424000
5	0.000272987	0.000277036
6	0.000390806	0.000386841
7	0.000305404	0.000307014
8	0.000293604	0.000291870
9	0.000197314	0.000198879
.....		
90	0.115302491	0.126008673
91	0.167938931	0.135159653
92	0.158595642	0.144260065
93	0.179791976	0.153227426
94	0.184257603	0.162042076
95	0.147302905	0.170765912
96	0.165865385	0.179515812
97	0.16011236	0.188343186
98	0.168421053	0.197270889
99	0.406639004	0.206269054

Cumplimentado los procedimientos de cálculo anteriores se concluye con la gráfica siguiente, donde se observa que los valores graduados estimados, se encuentran cercanos a los de las tasas brutas de mortalidad (valores reales), considerando $k = 1000$ y $z = 2$ y los pesos correspondientes a la edad x.

Gráfico No. 13



3.4 Fórmula Whittaker-Henderson TIPO B, según B de Howard L Weinert

El autor Weinert en su documento "Efficient computation for Whittaker-Henderson smoothing" [xii] Weinert (2006) desarrolla el problema del método de graduación de Whittaker-Henderson, Weinert retoma los estudios de numerosos escritores partiendo del aporte original de Bohlmann (1899) y Whittaker (1923), la fórmula desarrollada difiere de la original y el autor la explicitó en los siguientes términos:

$$\lambda \sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j)^2 + \sum_{j=1}^{n-p} (\Delta^p x_j)^2$$

Con la expresión anterior, se propone resolver un regularizado de mínimos cuadrados, problema en el que un parámetro escalar λ determina el equilibrio entre el ajuste de los datos y la suavidad de la secuencia filtrada; Δ es el operador de diferencias y utiliza el de orden 2. La metodología de Howard L Weinert utiliza una secuencia de n mediciones $\{y_1, y_2, \dots y_n\}$ (Measurements) que son las tasas brutas de mortalidad a graduar, un parámetro que es un número real positivo λ, el cual controla el equilibrio entre el ajuste (fidelidad) de los datos y la suavidad de la curva, y un entero positivo $p < n$ (orden de diferencias), el método tiene como finalidad encontrar la secuencia que minimice $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ (Valores graduados).

El primer sumando $\sum_{j=1}^{n}(y_j - x_j)^2$, mide el ajuste de los datos de las tasas brutas de mortalidad y el segundo mide la $\sum_{j=1}^{n-p} (\Delta^p x_j)^2$ la suavidad; así el parámetro λ controla el equilibrio entre la fidelidad (ajuste) y la suavidad, cuando $\lambda \to 0$ la solución converge al polinomio de grado $p - 1$ que es el mejor ajuste por mínimos cuadrados a los datos, y cuando un $\lambda \to \infty$ la solución converge a la secuencia de medición. La primera suma es una función monótona decreciente de λ, mientras que la segunda es una función monótona creciente de λ.

La solución que plantea Weinert es siempre por matrices, aunque el desarrollo final es mediante ecuaciones, este punto importante hace la diferencia de cálculo con respecto a otras investigaciones, su estudio parte de lo siguiente:

$y^T = [y_1 \ \ y_2 \dots y_n]$, representa el vector de las tasas brutas de mortalidad (secuencia de las mediciones).

$x^T = [x_1 \ \ x_2 \dots x_n]$, vector resultante de la graduación de los valores originales.

La solución se define:

$\lambda(y - x)^T(y - x) + x^T M^T M_x$. Donde:

M es una matriz de diferenciación $(n-p)$ x n. El minimizador de $\lambda(y-x)^T(y-x) + x^T M^T M_x$ es la solución de las ecuaciones normales de:

$A\hat{x} = \lambda y$

La expresión anterior es la que resuelve la graduación.

Donde:

$A = \lambda I + M^T M$

La solución de la expresión anterior se realizará mediante matrices en el siguiente apartado.

3.4.1 Desarrollo de ecuaciones y matrices

Weinert introduce una metodología diferente en donde su análisis lo realiza partiendo de la matriz $A = \lambda I + M^T M$, factorizando la matriz de coeficientes como $A = LDL^T$, lo que equivale entradas correspondientes, fila por fila, en la primera y segunda subdiagonales, con la diferencia esencial que lo realiza mediante fórmulas; en virtud de ello, su desarrollo de cálculo conduce a la siguiente formulación:

$$\boldsymbol{d_1 = 1 + \lambda, \quad f_1 = \frac{1}{d_1}, \quad \mu_1 = 2, \quad e_1 = \mu_1 f_1,}$$

$$\boldsymbol{d_2 = 5 + \lambda - \mu_1 e_1, \quad f_2 = \frac{1}{d_2}, \quad \mu_2 = 4 - e_1, \quad e_2 = \mu_2 f_2,}$$

$$\boldsymbol{d_j = 6 + \lambda - \mu_{j-1} e_{j-1} - f_{j-2}, \quad f_j = \frac{1}{d_j}, \quad \mu_j = 4 - e_{j-1}, \quad e_j = \mu_j f_j,}$$

$$\boldsymbol{d_{n-1} = 5 + \lambda - u_{n-2} e_{n-2} - f_{n-3}, \quad f_{n-1} = \frac{1}{d_{n-1}}, \quad \mu_{n-1} = 2 - e_{n-2}, \quad e_{n-1} = \mu_{n-1} f_{n-1}.}$$

$$\boldsymbol{d_n = 1 + \lambda - \mu_{n-1} e_{n-1} - f_{n-2}, \quad f_n = \frac{1}{d_{n-1}}}$$

Como L y D se están obteniendo, se resuelve el sistema triangular, de acuerdo a la siguiente expresión:

$LDB = \lambda y$

Usando

$$\boldsymbol{b_1 = f_1 \lambda y_1, \quad b_2 = f_2(\lambda y_2 + \mu_1 b_1)}$$

$$\boldsymbol{b_j = f_j(\lambda y_j + \mu_{j-1} b_{j-1} - b_{j-2})}$$

Con las expresiones anteriores, no es necesario realizar la graduación de las tasas brutas de mortalidad sobre la base de matriz $A = LDL^T$, para demostrar lo anterior y facilitar su comprensión se retomo el código que Weinert el cual estaba en MatLab y se realizó un equivalente en código de VBA para Excel; así mismo, se realizaron manualmente los cálculos para su aprehensión, el cual se desarrolla así:

Su inicio es con la estimación de Lambda (λ):

$$\lambda = \frac{4 * \sigma^2}{(1 - \sigma^2)} = 0.006666667$$

Donde σ (sigma) = 0.20, es una constante que para nuestro caso se eligió arbitrariamente con observancia de la tendencia de la gráfica de la curva graduada.

De esta forma se obtiene el valor de λ, que es el parámetro de la fórmula de Whittaker-Henderson Tipo B, $\lambda \sum_{j=1}^{n}(y_j - x_j)^2 + \sum_{j=1}^{n-p} (\Delta^p x_j)^2$.

3.4.1.1Operaciones con ecuaciones

Para $d_1 = 1 + \lambda$, $f_1 = 1/d_1$, $\mu_1 = 2$, $e_1 = \mu_1 f_1$, éstos cálculos corresponden a la primera posición cuando la edad actuarial vale cero y una tasa bruta de mortalidad de 0.011180412072528.

Cálculo de $\hat{x}_0$

$d_1 = 1 + \lambda$ $\qquad$ $d_1 = 1 + 0.006666667 = 1.006666667$

$f_1 = \frac{1}{d_1}$ $\qquad$ $f_1 = \frac{1}{1.006666667} = 0.993377483443709$

$\mu_1 = 2$

$e_1 = \mu_1 f_1$ $\qquad$ $e_1 = \mu_1 f_1 = 2 * 0.011180412072528 = 1.986754966887420$

$b_1 = f_1 \lambda y_1$ $\qquad$ $b_1 = 0.993377483443709 * 0.006666667 * 0.011180412072528 = 0.000074042464056$

Por último, el sistema triangular de la matriz $L^T \hat{x} = b$ se resuelve considerando las siguientes expresiones:

$\hat{x}_n = b_n$,
$\hat{x}_{n-1} = b_{n-1} + e_{n-1}\hat{x}_n$
$\hat{x}_j = b_j + e_j\hat{x}_{j+1} - f_j\hat{x}_{j+2}$

Llegado a este punto, se obtiene el valor graduado a la edad actuarial cero de la tasa bruta de mortalidad, de conformidad a la siguiente expresión:

$\hat{x}_j = b_j + e_{j-1}\hat{x}_{j+1} - f_j\hat{x}_{j+2}$

$$\hat{x}_1 = 0.000074042464056 + (1.986754966887420 * 0.003424785833557) - (0.993377483443709 * 0.002696814277681)$$

$$\boldsymbol{\hat{x}_1 = 0.004199298148923}$$

Cálculo de $\boldsymbol{\hat{x}_1}$

Para los cálculos de:

$d_2 = 5 + \lambda - \mu_1 e_1$

$$d_2 = 5 + 0.006666667 - (2 * 1.986754966887420) = 1.033156732891830$$

$f_2 = 1/d_2,$

$$f_2 = \frac{1}{1.033156732891830} = 0.967907354386565$$

$\mu_2 = 4 - e_1$

$$\mu_2 = 4 - 1.986754966887420 = 2.013245033112580$$

$e_2 = \mu_2 f_2,$

$$e_2 = 2.013245033112580 * 0.967907354386565 = 1.948634673731890$$

$b_2 = f_2(\lambda y_2 + \mu_1 b_1)$

$$b_2 = 0.967907354386565 * (0.006666667 * 0.001320978300989 + 2 * 0.000074042464056)$$

$$b_2 = 0.000151856388411$$

$\hat{x}_j = b_j + e_j\hat{x}_{j+1} - f_j\hat{x}_{j+2}$

$$\hat{x}_2 = 0.000151856388411 + (1.948634673731890 * 0.002696814277681) - (0.967907354386565 * 0.002047898857237)$$

$$\hat{x}_2 = 0.003424785833557$$

Para los valores graduados a partir de la edad actuarial dos, es el mismo procedimiento utilizado para $\hat{x}_2$, hasta antes de las últimas tres posiciones del límite de la edad actuarial de los valores a graduar, para cerrar los cálculos a continuación se desarrollaran las estimaciones de $\boldsymbol{\hat{x}_{97}}$, $\boldsymbol{\hat{x}_{98}}$ y $\boldsymbol{\hat{x}_{99}}$**.**

Cálculo de $\hat{x}_{97}$

$d_j = 6 + \lambda - \mu_{j-1}e_{j-1} - f_{j-2}$

$$d_{97} = 6 + 0.006666667 - (2.400000000000010 * 1.60) - 0.666666666666663$$

$$d_{97} = 1.500000000000010$$

$$f_{97} = \frac{1}{1.500000000000010} = 0.666666666666664$$

$$\mu_{97} = 4 - 1.60 = 2.40$$

$$e_{97} = 2.40 * 0.666666666666664 = 1.60$$

$$b_{97} = 0.666666666666664 * (0.006666667 * 0.153061224489796) + (2.400000000000010 * 0.009206348151446) - 0.008703048031087)$$

$$b_{97} = 0.009608397130433$$

$\hat{x}_j = b_j + e_j\hat{x}_{j+1} - f_j\hat{x}_{j+2}$

$$\hat{x}_2 = 0.009608397130433 + (1.60 * 0.194879440821663) - (0.666666666666664 * 0.206628340024968)$$

$$\boldsymbol{\hat{x}_2 = 0.183663275761782}$$

Cálculo de $\hat{x}_{98}$

$d_{n-1} = 5 + \lambda - u_{n-2}e_{n-2} - f_{n-3}$

$$d_{98} = 5 + 0.006666667 - (2.40 * 1.60) - 0.666666666666663$$

$$d_{98} = 5 + 0.006666667 - (2.40 * 1.60) - 0.666666666666663$$

$$d_{98} = 0.500000000000005$$

$f_{n-1} = \dfrac{1}{d_{n-1}}$

$$f_{98} = \frac{1}{0.500000000000005} = 1.999999999999980$$

$\mu_{n-1} = 2 - e_{n-2}$ $\mu_{98} = 2 - 1.60 = 0.40$

$e_{n-1} = \mu_{n-1} f_{n-1}$ $e_{98} = 0.400000000000004 * 1.999999999999980 = 0.799999999999999$

$b_j = f_j(\lambda y_j + \mu_{j-1} b_{j-1} - b_{j-2})$ $b_{98} = 1.999999999999980 * (0.006666667 * 0.140186915887850) + (2.40 * 2.400000000000010) - (0.009206348151446)$

$b_{98} = 0.029576768801689$

$\hat{x}_j = b_j + e_j \hat{x}_{j+1} - f_j \hat{x}_{j+2}$ $\hat{x}_{98} = 0.029576768801689 + (0.799999999999999 * 0.206628340024968)$

$\boldsymbol{\hat{x}_{98} = 0.194879440821663}$

Cálculo de $\hat{x}_{99}$

Para este cálculo estamos en el último dato a graduar

$d_n = 1 + \lambda - \mu_{n-1} e_{n-1} - f_{n-2},$ $d_{99} = 1 + 0.006666667 - (0.400000000000004 * 0.799\,999999999999) - 0.666666666666664$

$d_{99} = 0.020$

$f_n = \dfrac{1}{d_{n-1}}$ $f_{99} = \dfrac{1}{0.020000000000000}$

$= 49.999\,999999999700$

$b_j = f_j(\lambda y_j + \mu_{j-1} b_{j-1} - b_{j-2})$ $b_{99} = 49.999\,999999999700 * (0.006666667 * 0.286538461538462) + (0.400000000000004 * 0.029576768801689) - 0.009608397130433$

$b_{99} = 0.206628340024968$

$\hat{x}_n = b_n$ $\boldsymbol{\hat{x}_{99} = 0.206628340024968}$

Con el método Whittaker-Henderson Tipo B, según B de Howard L Weinert, una vez realizadas las operaciones se llega a los resultados sobre la base de esta metodología, (resultados finales se presentan en Anexo No. 4):

Comprobación del Método Whittaker-Henderson-Weinert

sig **0.2**
lam **0.006666667**

Edad	y_t	d_n	f_{n-2}	μ	e_{n-1}	b_j	x_n	*Comprobación*
0	0.011180412072528	1.006666666666670	0.993377483443709	2.000000000000000	1.986754966887420	0.000074042464056	0.004199298148923	0.004199298148923
1	0.001320978300989	1.033156732891830	0.967907354386565	2.013245033112580	1.948634673731890	0.000151856388411	0.003424785833557	0.003424785833557
2	0.000423877186193	1.090210104981270	0.917254385582108	2.051365326268110	1.881623841950490	0.000215103036098	0.002696814277681	0.002696814277681
3	0.000350097151960	1.178861405823470	0.848276137517172	2.118376158049510	1.796967945158700	0.000247469720349	0.002047898857237	0.002047898857237
4	0.000251428954558	1.282758229281160	0.779570130343572	2.203032054841300	1.717417986143700	0.000242295941093	0.001495402034220	0.001495402034220
5	0.000301315745422	1.374863654113940	0.727344851256886	2.282582013856300	1.660224275349960	0.000209711541512	0.001045367592594	0.001045367592594
6	0.000211323944512	1.437498466441680	0.695652916051701	2.339775724650040	1.627671805759790	0.000165423952448	0.000695546162454	0.000695546162454
7	0.000178885953325	1.470934836595730	0.679839769322723	2.372328194240210	1.612803052330060	0.000121375859271	0.000438728028251	0.000438728028251
8	0.000233539139700	1.484915597815690	0.673438949305267	2.387196947669940	1.607631404223590	0.000083557845565	0.000264475326315	0.000264475326315
9	0.000233894192115	1.489094116203060	0.671549225209372	2.392368595776410	1.606593276908880	0.000053490553997	0.000160617912476	0.000160617912476
:::::::								
91	0.152230971128609	1.500000000000010	0.666666666666661	2.400000000000010	1.599999999999990	0.006122183999230	0.127010374995221	0.127010374995221
92	0.140961857379768	1.500000000000010	0.666666666666662	2.400000000000010	1.599999999999990	0.006743114220603	0.135918709490965	0.135918709490965
93	0.166666666666667	1.500000000000010	0.666666666666662	2.400000000000010	1.599999999999990	0.007448267494218	0.144872616284330	0.144872616284330
94	0.149597238204833	1.500000000000010	0.666666666666662	2.400000000000010	1.599999999999990	0.008086695124591	0.153930886176848	0.153930886176848
95	0.164215686274510	1.500000000000010	0.666666666666663	2.400000000000010	1.599999999999990	0.008703048031087	0.163297603639266	0.163297603639266
96	0.151335311572700	1.500000000000010	0.666666666666663	2.400000000000010	1.600000000000000	0.009206348151446	0.173147962155854	0.173147962155854
97	0.153061224489796	1.500000000000010	0.666666666666664	2.400000000000000	1.600000000000000	0.009608397130433	0.183663275761782	0.183663275761782
98	0.140186915887850	0.500000000000005	1.999999999999980	0.400000000000004	0.799999999999999	0.029576768801689	0.194879440821663	0.194879440821663
99	0.286538461538462	0.020000000000000	49.999999999999700			0.206628340024968	0.206628340024968	0.206628340024968

3.4.1.2 Operaciones con matrices

Todo el de desarrollo de matrices inicia considerando la expresión siguiente:

$A\hat{x} = \lambda y$, ésta es la que resuelve la graduación.

Donde:

$$A = \lambda I + M^T M$$

Operando matrices:

$$A\hat{x} = \lambda y$$

$A^{-1}A\hat{x} = A^{-1}\,\lambda y$, despejando $\hat{x}$:

$$\hat{x} = A^{-1}\,\lambda y$$

La solución de la expresión anterior se realizó mediante matrices, para el cálculo se consideró lo siguiente:

Cuando $p = 2$ y $n = 100 - 2 = 98$, cuando se considera la diferencia de orden 2.

Matriz de diferenciación de orden 2. Este constituye el primer paso desarrollado.

$$
A=\begin{bmatrix}
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & -2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

Matriz anterior se Transpone:

$$
A^T=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & -2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

Matriz de diferenciación de orden 2 Transpuesta multiplicada por la matriz original M:

$$
A^TA=\begin{bmatrix}
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
-2 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & \dots & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 5 & -2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1
\end{bmatrix}
$$

El siguiente paso es elaborar la Matriz Identidad multiplicada por λ:

$\lambda = \frac{4*\sigma^2}{(1-\sigma^2)} = 0.006666667$, este valor se multiplico por I:

$$\lambda I=\begin{bmatrix}
0.0067 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & \dots & 0 \\
0.0000 & 0.0067 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & \dots & 0 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0067 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & \dots & 0 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0067 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & \dots & 0 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0067 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & \dots & 0 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0067 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & \dots & 0 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0067 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & \dots & 0 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0067 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & \dots & 0 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0067 & 0.0000 & \dots & \dots & 0 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0067 & \dots & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0.0067 & 0.000 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000 & 0.0067
\end{bmatrix}$$

Resultado final de la $[A] = \lambda I + M^T M$:

$$[A]=\lambda I+M^TM=\begin{bmatrix}
1.0067 & -2.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & \dots & 0 \\
-2.0000 & 5.0067 & -4.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & \dots & 0 \\
1.0000 & -4.0000 & 6.0067 & -4.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & \dots & 0 \\
0.0000 & 1.0000 & -4.0000 & 6.0067 & -4.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & \dots & 0 \\
0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & -4.0000 & 6.0067 & -4.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & \dots & 0 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & -4.0000 & 6.0067 & -4.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & \dots & 0 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & -4.0000 & 6.0067 & -4.0000 & 1.0000 & 0.0000 & \dots & \dots & 0 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & -4.0000 & 6.0067 & -4.0000 & 1.0000 & \dots & \dots & 0 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & -4.0000 & 6.0067 & -4.0000 & \dots & \dots & 0 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & -4.0000 & 6.0067 & \dots & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 5.007 & -2.000 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.000 & 1.007
\end{bmatrix}$$

El resultado de la expresión matricial anterior se le aplico su inversa, posteriormente se multiplicó por λy:

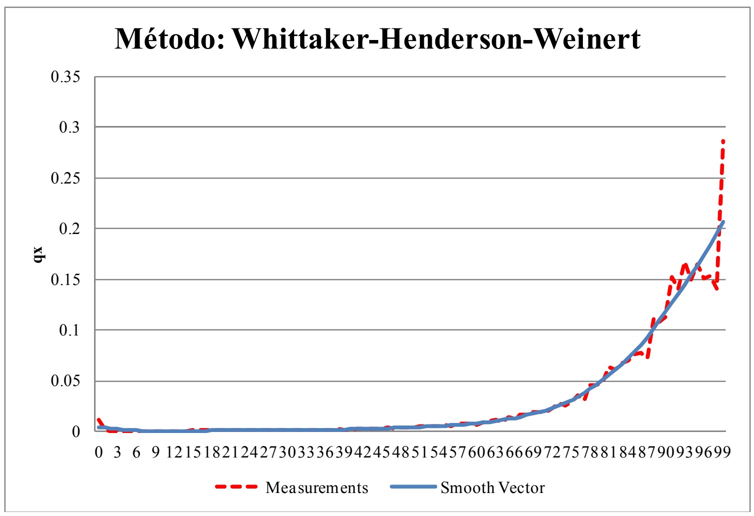
$$A^{-1}=\begin{bmatrix}
50.000 & 40.000 & 30.667 & 22.400 & 15.396 & 9.700 & 5.256 & 1.943 & -0.396 & -1.928 & \dots & \dots & -6.392E-08 \\
40.000 & 34.000 & 27.733 & 21.707 & 16.242 & 11.516 & 7.597 & 4.479 & 2.101 & 0.376 & \dots & \dots & 1.471E-09 \\
30.667 & 27.733 & 24.596 & 20.864 & 16.985 & 13.267 & 9.904 & 7.002 & 4.600 & 2.692 & \dots & \dots & 6.729E-08 \\
22.400 & 21.707 & 20.864 & 19.578 & 17.415 & 14.813 & 12.090 & 9.469 & 7.090 & 5.032 & \dots & \dots & 1.34E-07 \\
15.396 & 16.242 & 16.985 & 17.415 & 17.208 & 15.922 & 14.004 & 11.791 & 9.530 & 7.387 & \dots & \dots & 2.014E-07 \\
9.700 & 11.516 & 13.267 & 14.813 & 15.922 & 16.267 & 15.412 & 13.815 & 11.829 & 9.717 & \dots & \dots & 2.688E-07 \\
5.256 & 7.597 & 9.904 & 12.090 & 14.004 & 15.412 & 15.991 & 15.310 & 13.836 & 11.931 & \dots & \dots & 3.338E-07 \\
1.943 & 4.479 & 7.002 & 9.469 & 11.791 & 13.815 & 15.310 & 15.953 & 15.318 & 13.873 & \dots & \dots & 3.923E-07 \\
-0.396 & 2.101 & 4.600 & 7.090 & 9.530 & 11.829 & 13.836 & 15.318 & 15.951 & 15.310 & \dots & \dots & 4.381E-07 \\
-1.928 & 0.376 & 2.692 & 5.032 & 7.387 & 9.717 & 11.931 & 13.873 & 15.310 & 15.914 & \dots & \dots & 4.623E-07 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 34.000 & 40.000 \\
-6E-08 & 1E-09 & 7E-08 & 1E-07 & 2E-07 & 3E-07 & 3E-07 & 4E-07 & 0 & 0 & 0 & 40.000 & 50.000
\end{bmatrix}$$

$$\lambda y = \begin{bmatrix} 7.45361E\text{-}05 \\ 8.80652E\text{-}06 \\ 2.82585E\text{-}06 \\ 2.33398E\text{-}06 \\ 1.67619E\text{-}06 \\ 2.00877E\text{-}06 \\ 1.40883E\text{-}06 \\ 1.19257E\text{-}06 \\ 1.55693E\text{-}06 \\ 1.55929E\text{-}06 \\ :::: \\ :::: \\ 0.001020408 \\ 0.000934579 \\ 0.001910256 \end{bmatrix}$$

El resultado final de la expresión matricial: $\hat{x} = A^{-1}\,\lambda y$ es el siguiente:

Gráfico No. 14

$$A^{-1}\lambda y = \begin{bmatrix} 0.004199298 \\ 0.003424786 \\ 0.002696814 \\ 0.002047899 \\ 0.001495402 \\ 0.001045368 \\ 0.000695546 \\ 0.000438728 \\ 0.000264475 \\ 0.000160618 \\ :::: \\ :::: \\ 0.183663276 \\ 0.194879441 \\ 0.20662834 \end{bmatrix}$$



De esta forma se gradúan la tasas brutas de mortalidad con un enfoque de algebra matricial y considerando el método Whittaker-Henderson-Weinert.

Además del desarrollo antecedido, se consideró un nuevo propósito de llegar a obtener la igualdad de $A\hat{x} = \lambda y$, en este punto se retoma los valores calculados en las ecuaciones realizadas anteriormente, multiplicamos la matriz $A = \lambda I + M^T M$, por el vector de los valores graduados con el fin de verificar que son iguales a λy, los resultados obtenidos son los siguientes:

Edad	$A = \lambda I + M^T M$		
0	0.0000745360805	=	0.0000745360805
1	0.0000088065220	=	0.0000088065220
2	0.0000028258479	=	0.0000028258479
3	0.0000023339810	=	0.0000023339810
4	0.0000016761930	=	0.0000016761930
5	0.0000020087716	=	0.0000020087716
6	0.0000014088263	=	0.0000014088263
7	0.0000011925730	=	0.0000011925730
8	0.0000015569276	=	0.0000015569276
9	0.0000015592946	=	0.0000015592946
....			
91	0.0010148731409	=	0.0010148731409
92	0.0009397457159	=	0.0009397457159
93	0.0011111111111	=	0.0011111111111
94	0.0009973149214	=	0.0009973149214
95	0.0010947712418	=	0.0010947712418
96	0.0010089020772	=	0.0010089020772
97	0.0010204081633	=	0.0010204081633
98	0.0009345794393	=	0.0009345794393
99	0.0019102564103	=	0.0019102564103

Ver Anexo No. 5

3.4.1.3Desarrollo combinado de ecuaciones y matrices

Además de las estimaciones anteriores Weinert para resolver la expresión $[A] = \lambda I + M^T M$, realizó una factorización de coeficientes mediante la siguiente matriz:

$A = LDL^T$

Donde L es una matriz triangular inferior, es una banda de ancho = 2 y D es una matriz diagonal principal igual a 1, L^T es la matriz transpuesta de L. La matriz que desarrolla, los elementos de la primera subdiagonal de L como $\{-e_1, -e_2, \dots \dots - e_{n-1}\}$ y los de la segunda subdiagonal como $\{f_1, f_2, \dots \dots f_{n-2}\}$. Para el caso de la diagonal de D los elementos se denotan como $\{d_1, d_2, \dots \dots d_n\}$.

Matriz L:

$$
L=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
-1.9868 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0.9934 & -1.9486 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0.9679 & -1.8816 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0.9173 & -1.7970 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.8483 & -1.717 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.7796 & -1.660 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7273 & -1.6277 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6957 & -1.6128 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6798 & -1.6076 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1.6 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0.6667 & -0.8 & 1
\end{bmatrix}
$$

Los valores de la primera subdiagonal de L como $\{-e_1, -e_2, \dots \dots - e_{n-1}\}$ y los de la segunda subdiagonal como $\{f_1, f_2, \dots \dots f_{n-2}\}$, se obtuvieron del desarrollo del apartado anterior, para efectos ilustrativos, los valores calculados fueron los siguientes:

Edad	*-en-1*	*fn-2*
0	-1.98675496689	0.99337748344
1	-1.94863467373	0.96790735439
2	-1.88162384195	0.91725438558
3	-1.79696794516	0.84827613752
4	-1.71741798614	0.77957013034
5	-1.66022427535	0.72734485126
6	-1.62767180576	0.69565291605
7	-1.61280305233	0.67983976932
8	-1.60763140422	0.67343894931
9	-1.60659327691	0.67154922521
::::		
97	-1.60000000000	0.66666666667
98	-0.80000000000	2
99	0.00000000000	50

Matriz D:

$$
D=\begin{bmatrix}
1.0067 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1.0332 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1.0902 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0.0000 & 1.1789 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1.2828 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3749 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4375 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4709 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4849 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4891 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1.50 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0.5 & 0.0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0.02
\end{bmatrix}
$$

Esta matriz se obtiene mediante la resolución de ecuaciones de d_n:

Edad	*dn*
0	1.006666667
1	1.033156733
2	1.090210105
3	1.178861406
4	1.282758229
5	1.374863654
6	1.437498466
7	1.470934837
8	1.484915598
9	1.489094116
::::	1.5
98	0.5
99	0.02

Matriz L^T:

$$
L^T=\begin{bmatrix}
1 & -1.987 & 0.9934 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & -1.949 & 0.9679 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1.882 & 0.9173 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0.0000 & 1 & -1.797 & 0.8483 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1.717 & 0.7796 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1.66 & 0.7273 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1.628 & 0.6957 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1.613 & 0.6798 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1.608 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & -2 & 0.6667 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -0.8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

Es la transpuesta de *L*

Matriz *LD*

$$
LD=\begin{bmatrix}
1.0067 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
-2 & 1.0332 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
1 & -2.013 & 1.0902 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & -2.0514 & 1.1789 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2.118 & 1.2828 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2.203 & 1.3749 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.283 & 1.4375 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.34 & 1.4709 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.372 & 1.4849 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.387 & 1.4891 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 2 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -2.4 & 0.5 & 0.0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -0.4 & 0.02
\end{bmatrix}
$$

Matriz LDL^T

$$LDL^T = \begin{bmatrix}
1.0067 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\
-2 & 5.0067 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\
1 & -4 & 6.0067 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\
0 & 1 & -4.0000 & 6.0067 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 1 & -4 & 6.0067 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6.0067 & -4 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6.0067 & -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6.0067 & -4 & 1 & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6.0067 & -4 & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6.0067 & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 6 & -4 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -4 & 5.0067 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2
\end{bmatrix}$$

Spoerl (1937) [xiii] tiene un tratamiento en profundidad del enfoque ecuación de diferencia. Henderson (1925) fue el primero en utilizar métodos matriciales para resolver las ecuaciones normales con lo que parece ser el primer uso de la factorización matriz $A = LDL^T$.

Como L y D se están obteniendo, de esta forma se resuelve el sistema triangular usando $LDb = \lambda y$; por último, se resuelve el sistema triangular utilizando la siguiente expresión: $L^T\hat{x} = b$, de conformidad al desarrollo realizado se llego a determinar lo siguiente:

Multiplicación la matriz LD por el vector del b e igualando al producto de λy (Ver Anexo No. 6):

Edad	$LDb = \lambda y$		
0	0.000074536080484	=	0.000074536080484
1	0.000008806522007	=	0.000008806522007
2	0.000002825847908	=	0.000002825847908
3	0.000002333981013	=	0.000002333981013
4	0.000001676193030	=	0.000001676193030
5	0.000002008771636	=	0.000002008771636
6	0.000001408826297	=	0.000001408826297
7	0.000001192573022	=	0.000001192573022
8	0.000001556927598	=	0.000001556927598
9	0.000001559294614	=	0.000001559294614
....			
91	0.001014873140857	=	0.001014873140857
92	0.000939745715865	=	0.000939745715865
93	0.001111111111111	=	0.001111111111111
94	0.000997314921366	=	0.000997314921366
95	0.001094771241830	=	0.001094771241830
96	0.001008902077151	=	0.001008902077151
97	0.001020408163265	=	0.001020408163265
98	0.000934579439252	=	0.000934579439252
99	0.001910256410256	=	0.001910256410256

Para el desarrollo de la matriz L^T por el vector $\hat{x}$, se comprobó que los valores resultantes son iguales al vector b, previo a ello se realizaron las siguientes operaciones:

$\hat{x} = (L^T)^{-1}b$, donde $(L^T)^{-1}$ es:

$$
(L^T)^{-1} = \begin{bmatrix}
1 & 1.9868 & 2.8781 & 3.4925 & 3.6359 & 3.2818 & 2.6141 & 1.8679 & 1.194 & 0.6497 & \dots & \dots & -1.278E\text{-}09 \\
0 & 1 & 1.9486 & 2.6987 & 3.0621 & 2.9696 & 2.5431 & 1.9794 & 1.4233 & 0.9425 & \dots & \dots & 2.943E\text{-}11 \\
0 & 0 & 1 & 1.8816 & 2.464 & 2.6355 & 2.4547 & 2.0785 & 1.6447 & 1.2309 & \dots & \dots & 1.346E\text{-}09 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1.797 & 2.2379 & 2.3145 & 2.1395 & 1.8406 & 1.5044 & \dots & \dots & 2.679E\text{-}09 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.7174 & 2.0717 & 2.1229 & 1.9827 & 1.7442 & \dots & \dots & 4.029E\text{-}09 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.6602 & 1.975 & 2.0303 & 1.9213 & \dots & \dots & 5.376E\text{-}09 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.6277 & 1.9295 & 1.9953 & \dots & \dots & 6.675E\text{-}09 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.6128 & 1.913 & \dots & \dots & 7.846E\text{-}09 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.6076 & \dots & \dots & 8.762E\text{-}09 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 9.246E\text{-}09 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 2 & 0.61333 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0.80 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

La matriz anterior se multiplica por b:

$$
\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix}
0.004199298148923 \\
0.003424785833557 \\
0.002696814277681 \\
0.002047898857237 \\
0.001495402034220 \\
0.001045367592594 \\
0.000695546162454 \\
0.000438728028251 \\
0.000264475326315 \\
0.000160617912476 \\
:::: \\
:::: \\
0.183663275761782 \\
0.194879440821663 \\
0.206628340024968
\end{bmatrix}
$$

Multiplicando la matriz anterior por el vector columna b, realizando esta operación llegamos al resultado final de graduar las tasas brutas de mortalidad, con los procedimientos anteriores se combinó elementos algebra matricial y resolución de ecuaciones, permitiendo ello a obtener el propósito de este documento.

3.5 Fórmula de Whittaker-Henderson Tipo B, según Lourie

El método de graduación de Whittaker-Henderson realizado por Walter B. Lowrie [xiv], determina un conjunto de valores que minimizan una ecuación en diferencias; así mismo, dicho método permite un equilibrio explícito entre la bondad de ajuste y la suavidad, el autor parte su análisis de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\sum W_t(Grad - Raw)^2 + h\sum(\Delta^n Grad)^2$$

Resumiendo:

$$M = F + hS$$

El desarrollo de Lowrie se ha combinado con los estudios de R.C.W. (Bob) Howard [xv], éste último, además ha elaborado un aplicativo computacional (VBA para Excel), el cual se ha utilizado para comparar los resultados de las tasas graduadas con las dos metodologías explicitadas en los apartados anteriores.

Mediante la fórmula $\sum W_t(Grad - Raw)^2 + h\sum(\Delta^n Grad)^2$, se minimiza por el método de Whittaker-Henderson Tipo B en donde la graduación es esencialmente un proceso de ajuste y suavizado. El primer término es una expresión de la bondad de ajuste de los valores graduados, mientras que el segundo término, es una expresión para el grado de suavidad de los valores de graduados, el método calcula directamente un conjunto completo de valores graduados que alcanzan el equilibrio deseado entre ajuste y suavidad, donde:

Wt**:** significa los pesos correspondientes a cada tasa cruda (Tasas brutas de mortalidad). El peso que se utiliza es por medio de un soporte teórico. En el trabajo de Lowrie siempre normaliza los pesos y considera que siempre hay un peso para cada tasa bruta de mortalidad, en los casos que no se tengan disponibilidad de datos, es posible utilizar un peso de cero y una tasa bruta de mortalidad artificial para las edades en las cuales no hay datos.

Raw**:** se refiere a las tasas de mortalidad (Tasas brutas de mortalidad) determinadas a partir de un estudio de la experiencia, las muertes reales dividido por la exposición real.

$Grad$: se refiere a las tasas de mortalidad graduadas.

Así: $W_t(Grad - Raw)^2$, esta expresión se le conoce como Fit y se define como la suma de la diferencia al cuadrado entre las datos graduados menos los datos brutos, que se pondera por un conjunto de números, tales como la exposición a cada edad para la mortalidad.

h: significa el factor de equilibrio entre el ajuste y la suavidad.
Δ: Operador de diferencia finita
n: significa el orden de la ecuación de diferencia que se utiliza para expresar la suavidad.

Así: $(\Delta^n Grad)^2$ es la parte correspondiente a la suavidad (Smooth) y se define como la suma de los cuadrados de las diferencias de un orden especificado, generalmente se utilizan las diferencias segundas o terceras.

El método minimiza la expresión $M = F + hS$, donde F es la medida de ajuste, S es la medida de la suavidad, y h es una constante que establece el equilibrio éntrela forma y la suavidad de la curva.

El factor h se determina arbitrariamente, por lo que un valor bajo de h pone más énfasis en el ajuste de la suavidad, en los casos que se decida por un valor extremadamente bajo de h devuelve las tasas brutas de mortalidad originales por lo que de forma esencial no hay un proceso de graduación. Un valor alto de h pone más énfasis el ajuste. Un valor extremadamente alto valor de h se obtiene un ajuste de mínimos cuadrados a un polinomio de grado $(n - 1)$.

De acuerdo al autor, la graduación es esencialmente un proceso de suavizado, la idea de trasfondo es que hay una relación fluida detrás de las observaciones de las tasas brutas de mortalidad, tal como una curva de mortalidad, pero la relación es oscurecida por el ruido aleatorio provocada por la tasa bruta de mortalidad. En sí, la graduación busca promediar los datos observados para que algo parecido a la relación subyacente sea observado, entonces con la graduación lo que se busca es un equilibrio entre la bondad del ajuste (forma) y la suavidad de la curva.

Para los fines prácticos de la ciencia actuarial, el autor Lowrie, introdujo cambios importantes en sus estudios de graduación y de acuerdo a Howard se obtendrían mejores resultados. Lowrie mediante sus trabajos observó que era posible mediante una variación relativamente menor a la fórmula original, mejorar substancialmente los resultados de las tasas graduadas.

Lowrie tiene una segunda extensión que puede ser utilizada con la definición normal de suavidad o extensión Lowrie a una suavidad exponencial. Se añade un tercer término de la ecuación en diferencias que implica el ajuste ponderado de las tasas graduadas a las de una tabla estándar. La idea es hacer hincapié en ajuste a las tasas brutas de mortalidad, donde hay gran cantidad de datos y además es factible ajustar la tasa bruta de mortalidad a una tabla estándar, donde hay muy pocos datos. Para lograr este resultado los pesos de la tabla estándar deben ser grandes.

La fórmula ampliada de Lowrie es:

$$(1-l)\sum W_t(Grad - Raw)^2 + h\sum(\Delta^n Grad - r\Delta^{n-1}Grad)^2 + l\sum W_s(Grad - Std)^2$$

Donde:

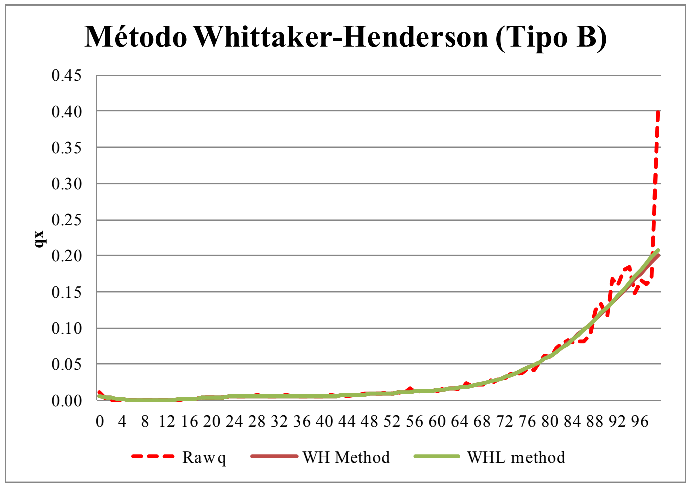
l : es el factor de ajuste de la tabla estándar, en el intervalo [0,1].
r: es el índice de crecimiento previsto, es decir, (1 + r) es la base de la exponencial.
W_t: es el peso para el ajuste de la tabla estándar.
Std: es la tabla estándar (Se retomó la tabla estándar del autor).
Grad, Raw y n: tienen el mismo significado explicado anteriormente

El estudio de Howard y su aplicativo se utilizaron para el caso de la población del Censo de 2007, dando los siguientes resultados:

Método Whittaker-Henderson
(Tipo B)

Edad	Raw q	WH Method	WHL method
0	0.01118041	0.0050948343	0.0050052508
1	0.00142777	0.0038726547	0.0038284331
2	0.00064464	0.0027663672	0.0027540305
3	0.00035145	0.0018440070	0.0018516837
4	0.00043091	0.0011300371	0.0011482413
5	0.00027299	0.0006161254	0.0006379972
6	0.00039081	0.0002778308	0.0002989355
7	0.0003054	0.0000828543	0.0001008015
8	0.0002936	0.0000017672	0.0000156670
9	0.00019731	0.0000113039	0.0000212195
:::::::			
85	0.08152007	0.0911745102	0.0909285804
86	0.08139535	0.0978729637	0.0977248616
87	0.08945455	0.1048643174	0.1048563018
88	0.12393888	0.1121203623	0.1123018308
89	0.13354232	0.1195973066	0.1200250266
90	0.11530249	0.1272590375	0.1279969792
91	0.16793893	0.1350776218	0.1361966483
92	0.15859564	0.1430189485	0.1445965425
93	0.17979198	0.1510584049	0.1531782654
94	0.1842576	0.1591761096	0.1619276487
95	0.1473029	0.1673592923	0.1708370567
96	0.16586538	0.1756003385	0.1799034123
97	0.16011236	0.1838880788	0.1891195372
98	0.16842105	0.1922098547	0.1984761507
99	0.406639	0.2005498949	0.2079602380

Gráfico No. 15



CAPÍTULO 4. MODELOS DE WHITTAKER-HENDERSON COMPARADOS

El presente apartado, enumera los aspectos más importantes de los tres métodos, que enlaza el trabajo de graduación de Hhittaker y Henderson Tipo B y conduce a las fórmulas que se han desarrollado, que para ser de mayor utilidad en la práctica, se han utilizado para proponer una metodología aceptable para construir tablas actuariales en El Salvador.

El propósito a lograr es el de estimar q_x graduadas, para lograr el objetivo se utilizaron tres modelos de graduación de tasas brutas de mortalidad para los datos del Censo de 2007 de El Salvador, los tres modelos trabajan la probabilidad de fallecimiento q en función de la edad x; en este sentido, es racional plantearse la hipótesis: $q = f(x,. . .)$, para lograr una expresión o modelo de comportamiento de esa probabilidad.

Separando del análisis los parámetros que anteponen los sumandos; de forma rigurosa, el primer término de la fórmula a que hace referencia, es la suma de las desviaciones de la tendencia al cuadrado de la serie con relación a la tasa bruta de mortalidad y los valores graduados, y mide el grado de ajuste, en otros términos, es una medida originada de la distorsión causada por la graduación.

El segundo término es la suma de cuadrados de las diferencias de orden 1, 2 o 3 de los componentes de tendencia y mide el grado de suavidad. Lo que se logra con modelo de Whittaker-Henderson es el cambio suave de la tendencia en el tiempo de la secuencia de valores que se utilizan en la graduación de la tasa bruta de mortalidad. Con el método en referencia, se concreta la finalidad de minimizar la expresión de la formula $M = F + hS$, en donde la constante que se coloca en el segundo sumando, es una constante elegida para dar un equilibrio entre el ajuste y la distorsión de la secuencia de valores suavizados.

Los valores graduados son el propósito fundamental del presente documento; generalmente y, como es usual, las tres metodologías utilizan operaciones en diferencias, que son consideradas como dando un criterio ajuste y de suavidad, con ello los resultados que se obtienen pueden ser tomados como una medida de la rigurosidad de los valores graduados, esta graduación de secuencia de valores debe dar no solo una regularidad, sino también una fidelidad, es decir los resultados que se obtienen al final deben reflejar lo más aproximadamente los datos observados.

En la práctica no se debe perder de vista que, las frecuencias observadas de las tasas brutas de mortalidad necesitan ser ajustadas (graduadas), derivado de los problemas en la fiabilidad de la información estadística de los expuestos y fallecidos; es posible que las irregularidades en la información (insuficiencia de datos, inexactitud ya sea voluntaria o involuntaria), se puedan resolver admitiendo la hipótesis a dichas irregularidades observadas en los valores de la función, son debido a la existencia inevitable de errores accidentales en las secuencia de valores observados y que su efecto se corrige tomando como valores definitivos de la función no los observados, sino los correspondientes a una cierta curva próxima a los valores experimentales que recibe el nombre de curva graduada a los valores de la secuencia de la tasa bruta de mortalidad.

En los modelos estudiados en este trabajo, la graduación realizada con el método Whittaker-Henderson Tipo B, se considera lo siguiente, primero el orden de la diferencia utilizado para la suavidad; segundo el factor de ajuste del balance entre la bondad del ajuste y la suavidad; y un tercer componente de las ponderaciones utilizadas para determinar la bondad del ajuste ("pesos").

Como se observa las tasas graduadas obtenidas son muy cercanas a las tasas brutas, esto se debe a la diferencia de orden 2 y la importancia del suavizamiento (k).

Es importante realizar varias consideraciones al realizar los cálculos, previo a ello es conveniente considerar los siguientes supuestos:

1. Reporte de las Muertes y Expuestos son completos;
2. Las edades se informaron con precisión;
3. No existe migración que se produzca después de los 90 años; y
4. Cohortes se extinguen antes de alcanzar la edad de 99 años.

De acuerdo al método de Whittaker-Henderson Tipo B utilizado, la graduación de las tasas brutas de mortalidad parecen dar buenos resultados; el método tiene la ventaja de permitir el control directo sobre la bondad de ajuste y suavidad. No obstante, es conveniente tener presente las siguientes consideraciones:

1. Las edades sometidas al proceso de graduación, ello dependerá del nivel de información estadística disponible. Generalmente en países como El Salvador, hay muy pocos datos de Expuestos y Fallecidos, que me permitan realizar cálculos razonables, especialmente cálculos de graduación en edades extremas.
2. El peso utilizar es importante, para ello existen varias metodologías para estimar los pesos generalmente se utiliza el peso que mejor se ajuste a la población en estudio.
3. El orden de la diferencia de usar, es un tema importante de suavizamiento, ello depende de la curva que esperamos encontrar. Si se utiliza la orden 3, entonces la curva tendrá una suavidad perfecta y es una parábola; si el orden es de 4, la curva será cúbica. Si se decide la diferencia de orden 2, la curva a reflejar será una curva exponencial. Generalmente, el orden de la diferencia es más difícil decidir, no obstante, la mayoría de los resultados obtenidos, parece que hay ajustes más cercanos a la tabla real subyacente cuando se utiliza la diferencia de orden 2 y posiblemente de orden 3.
4. Factor o importancia de suavizamiento que se requiera utilizar. Aquí se trata más de una habilidad que una ciencia, posiblemente este aspecto sea una desventaja del método.

   Dependiendo la utilidad de la información disponible, tratar muchos valores y examinar tanto las estadísticas de graduación (medidas de ajuste y suavidad) y la utilización de un gráfico de las tasas de graduadas y compararlas con las tasas brutas, sea un método visual que ofrezca mejores y mayores ventajas. Generalmente, la mayor parte del análisis y trabajo se encuentre en la búsqueda de un factor de suavidad adecuado. Se recomienda que las decisiones que se adopten, no sean tan lineales, al final lo importante y necesario es probar diferentes combinaciones para optimizar todo el proceso de graduación con el método Whittaker-Henderson Tipo B.

En todo caso al realizar estudios de graduación, es conveniente analizar el cumplimiento de condiciones como: Existencia de una regularidad general aceptable; observar una concordancia en los resultados que sean lo más exactos posibles, especialmente entre la suma de los valores observados y los graduados; verificar que la suma compensada denominada suma de los valores absolutos de las desviaciones positivas y negativas, mantengan una igualdad.

Derivado de lo anterior y de acuerdo a los resultados de las tres metodologías es importante mostrar comparativamente los resultados de los tres métodos para el caso de la graduación de las tasas brutas de mortalidad expresada como el cociente de los fallecimientos y expuestos de hombres de conformidad al siguiente detalle:

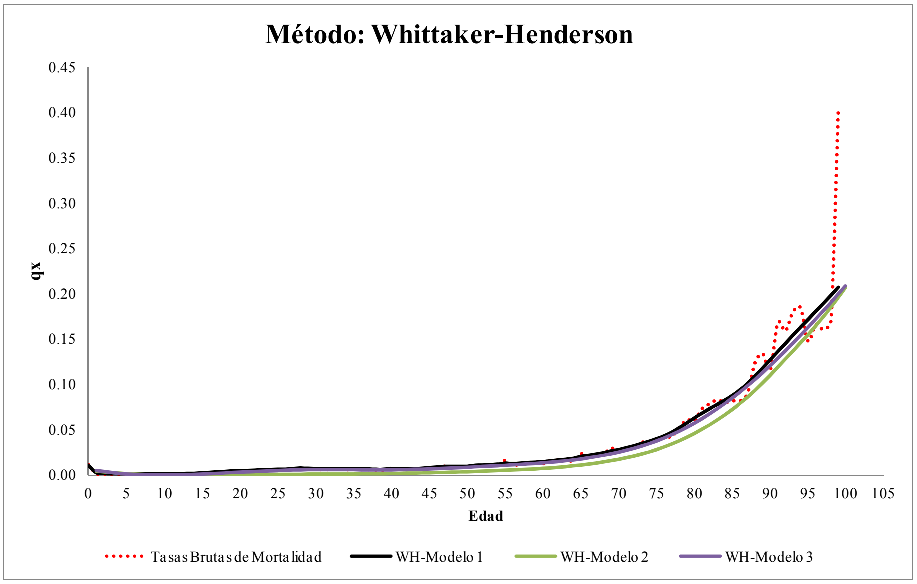
Método: Whittaker-Henderson

Tasas Graduadas

Age	Tasas Brutas de Mortalidad	WH-Modelo 1	WH-Modelo 2	WH-Modelo 3
0	0.0111804120725	0.0097047491076	0.0041992981489	0.0050052508117
1	0.0014277662972	0.0017654369453	0.0034247858336	0.0038284331396
2	0.0006446414182	0.0005848872167	0.0026968142777	0.0027540305297
3	0.0003514526710	0.0003507954612	0.0020478988572	0.0018516837338
4	0.0004309106579	0.0004240002077	0.0014954020342	0.0011482412838
5	0.0002729871214	0.0002770358177	0.0010453675926	0.0006379972239
6	0.0003908059287	0.0003868406915	0.0006955461625	0.0002989354789
7	0.0003054043288	0.0003070141319	0.0004387280283	0.0001008015269
8	0.0002936036351	0.0002918695999	0.0002644753263	0.0000156670115
9	0.0001973137147	0.0001988786219	0.0001606179125	0.0000212194648
:::::::				
90	0.1153024911032	0.1260086731010	0.1181224429815	0.1279969791502
91	0.1679389312977	0.1351596533202	0.1270103749952	0.1361966483113
92	0.1585956416465	0.1442600652000	0.1359187094910	0.1445965424534
93	0.1797919762259	0.1532274263582	0.1448726162843	0.1531782654378
94	0.1842576028623	0.1620420759727	0.1539308861768	0.1619276487348
95	0.1473029045643	0.1707659120975	0.1632976036393	0.1708370566817
96	0.1658653846154	0.1795158116864	0.1731479621559	0.1799034123454
97	0.1601123595506	0.1883431859363	0.1836632757618	0.1891195372387
98	0.1684210526316	0.1972708885596	0.1948794408217	0.1984761507184
99	0.4066390041494	0.2062690539339	0.2066283400250	0.2079602379527

Los datos completos se pueden observar en el Anexo No. 7

Gráfico No. 16



En el gráfico anterior se observa el comportamiento de todas las series qx de los modelos aplicados. Puede observarse que las variaciones anuales de las tres estimaciones son pequeñas, aún en el periodo de 13 a 55 años en cuestión. El mismo procedimiento se aplica a la tasa bruta de mortalidad para el género femenino.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIÓN Y RECOMENDACIÓN DE METODOLOGÍA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE TABLAS ACTUARIALES

En la literatura actuarial estudiada y referida a los métodos no paramétricos, el proceso de suavizado de una tabla actuarial se conoce como un proceso de graduación de los datos, así el modelo de Whittaker-Henderson conlleva el propósito fundamental de la graduar actuarialmente las fluctuaciones aleatorias de las tasas brutas de mortalidad, siendo éstas una secuencia de valores observados diferenciados por edad de los fallecimientos con respecto a la población expuesta, para ello es importante lograr minimizar una función que cumpla con los criterios y un equilibrio entre el ajuste y la suavidad siendo éste el tema central de la graduación. El criterio de suavidad es fácilmente comprensible, pero a la vez es complejo por las posibles valoraciones subjetivas con que la administre el desarrollador de tablas actuariales, este aspecto amerita ser cauteloso al momento de definir éste criterio.

El método de graduación de Whittaker-Henderson Tipo B estudiado, se fundamenta en la minimización de la suma de los valores absolutos de las desviaciones y la suma de los valores absolutos de las ecuaciones en diferencias, es importante considerar que la mortalidad no se resume únicamente por unos parámetros, además se debe considerar seriamente como un compromiso entre la fe hacia los datos de secuencia y la reducción de la rigurosidad causadas por el ruido aleatoria que conlleva las tasas brutas de mortalidad.

Considerando que el proceso de graduación de las tasas brutas de mortalidad cuando se pretende filtrar y suavizar los errores que se encuentra en las tasas mencionadas no es un problema de fácil resolución, ante ello un aspecto significativo que se advirtió es que el proceso solo de suavizado, no es en sí una graduación actuarial en términos estrictos, ya que las tasas graduadas debe ser representativo de los datos subyacentes. Las dos condiciones de suavidad y bondad de ajuste, en algunas circunstancias tienden a crear conflicto, en el sentido de que la suavidad no se puede mejorar más allá de un cierto punto sin algún sacrificio de bondad de ajuste, y viceversa. Por lo tanto, una graduación para que sea útil en los procesos actuariales debe considerar seriamente el compromiso entre el ajuste óptimo y suavidad óptima, para lograr esa optimización el actuario debe tener conocimiento y libertad en la elección del nivel de los parámetros de ajuste y suavizamiento de los datos observados.

Un recurso valioso para advertir que el proceso de graduación es razonable actuarialmente, se obtiene mediante una visualización de las curvas representativas de las estimaciones no paramétricas de las tasas de mortalidad son como un diagnóstico gráfico que proporcionan orientación, en esta línea de ideas, el graduador puede intuir que cuanto más ondulada sea la curva de la probabilidad de muerte estimada, le da la pauta que ha calculado mediante una estimación local de polinomios con una pequeña vecindad, de forma contraria, si la curva es más plana, se puede advertir que se ha calculado usando una vecindad muy grande, para lograr el equilibrio óptimo debe estudiar seriamente los parámetros de suavizado y concluir que son los correctos.

En virtud de lo expresado en el presente apartado y considerando que el método de la fórmula Whittaker-Henderson TIPO B, según B de Howard L Weinert, éste presenta diferencias en los datos calculados a partir de edad de 50 a 95, esta metodología, mantiene bondades que permiten por su practicidad ser la opción de calculo que se podría ajustar a las necesidades de estimación y construcción de tablas actuariales en el Sistema de Ahorro para Pensiones, aplicables a los colectivos de Activos cotizantes y pensionados. Derivado de ello, se concluye que la metodología de graduación de Wittaker-Henderson-Weinert Tipo B, puede aplicarse en El Salvador para los fines de construir tablas actuariales, por lo que es recomendable que se utilice la metodología propuesta, por ser ésta más eficiente en el proceso de graduación y con mayor rigurosidad técnica actuarial.

Anexo No. 1

Tabla de Mortalidad para Hombres Acticos cotizantes y Pensionados, del Sistema de Ahorro para Pensiones

De cero a menores de 70		De 70 a menores de 110	
c	1.08958261	c	1.09619240
g	0.99927508	g	0.99956741
s	0.99973666	s	0.99888792

TABLAS DE VEJEZ HOMBRES RV H ES

Tasa de Interés Técnico: i = 6%

EDAD	qx	dx	lx	v^x	Dx	Nx
0	0.00033	330	1,000,000	1.00000000	1,000,000	17,279,759
1	0.00033	330	999,670	0.94339623	943,085	16,279,759
2	0.00034	340	999,340	0.88999644	889,409	15,336,674
3	0.00035	350	999,000	0.83961928	838,780	14,447,265
4	0.00035	350	998,650	0.79209366	791,024	13,608,485
5	0.00036	359	998,300	0.74725817	745,988	12,817,461
6	0.00037	369	997,941	0.70496054	703,509	12,071,473
7	0.00038	379	997,572	0.66505711	663,442	11,367,964
8	0.00039	389	997,193	0.62741237	625,651	10,704,522
9	0.00040	399	996,804	0.59189846	590,007	10,078,871
10	0.00042	418	996,405	0.55839478	556,387	9,488,864
11	0.00043	428	995,987	0.52678753	524,674	8,932,477
12	0.00045	448	995,559	0.49696936	494,762	8,407,803
13	0.00046	458	995,111	0.46883902	466,547	7,913,041
14	0.00048	477	994,653	0.44230096	439,936	7,446,494
15	0.00050	497	994,176	0.41726506	414,835	7,006,558
16	0.00052	517	993,679	0.39364628	391,158	6,591,723
17	0.00054	536	993,162	0.37136442	368,825	6,200,565
18	0.00057	566	992,626	0.35034379	347,760	5,831,740
19	0.00059	585	992,060	0.33051301	327,889	5,483,980
20	0.00062	615	991,475	0.31180473	309,147	5,156,091
21	0.00066	654	990,860	0.29415540	291,467	4,846,944

22	0.00069	683	990,206	0.27750510	274,787	4,555,477
23	0.00073	722	989,523	0.26179726	259,054	4,280,690
24	0.00077	761	988,801	0.24697855	244,213	4,021,636
25	0.00082	810	988,040	0.23299863	230,212	3,777,423
26	0.00087	859	987,230	0.21981003	217,003	3,547,211
27	0.00092	907	986,371	0.20736795	204,542	3,330,208
28	0.00098	966	985,464	0.19563014	192,786	3,125,666
29	0.00104	1,024	984,498	0.18455674	181,696	2,932,880
30	0.00111	1,092	983,474	0.17411013	171,233	2,751,184
31	0.00119	1,169	982,382	0.16425484	161,361	2,579,951
32	0.00127	1,246	981,213	0.15495740	152,046	2,418,590
33	0.00136	1,333	979,967	0.14618622	143,258	2,266,544
34	0.00146	1,429	978,634	0.13791153	134,965	2,123,286
35	0.00157	1,534	977,205	0.13010522	127,139	1,988,321
36	0.00169	1,649	975,671	0.12274077	119,755	1,861,182
37	0.00182	1,773	974,022	0.11579318	112,785	1,741,427
38	0.00195	1,896	972,249	0.10923885	106,207	1,628,642
39	0.00211	2,047	970,353	0.10305552	100,000	1,522,435
40	0.00227	2,198	968,306	0.09722219	94,141	1,422,435
41	0.00245	2,367	966,108	0.09171905	88,611	1,328,294
42	0.00265	2,554	963,741	0.08652740	83,390	1,239,683
43	0.00286	2,749	961,187	0.08162962	78,461	1,156,293
44	0.00309	2,962	958,438	0.07700908	73,808	1,077,832
45	0.00334	3,191	955,476	0.07265007	69,415	1,004,024
46	0.00362	3,447	952,285	0.06853781	65,268	934,609
47	0.00392	3,719	948,838	0.06465831	61,350	869,341
48	0.00425	4,017	945,119	0.06099840	57,651	807,991
49	0.00460	4,329	941,102	0.05754566	54,156	750,340
50	0.00499	4,674	936,773	0.05428836	50,856	696,184
51	0.00541	5,043	932,099	0.05121544	47,738	645,328
52	0.00587	5,442	927,056	0.04831645	44,792	597,590
53	0.00637	5,871	921,614	0.04558156	42,009	552,798
54	0.00692	6,337	915,743	0.04300147	39,378	510,789

55	0.00751	6,830	909,406	0.04056742	36,892	471,411
56	0.00816	7,365	902,576	0.03827115	34,543	434,519
57	0.00886	7,932	895,211	0.03610486	32,321	399,976
58	0.00963	8,544	887,279	0.03406119	30,222	367,655
59	0.01047	9,200	878,735	0.03213320	28,237	337,433
60	0.01137	9,887	869,535	0.03031434	26,359	309,196
61	0.01236	10,625	859,648	0.02859843	24,585	282,837
62	0.01344	11,411	849,023	0.02697965	22,906	258,252
63	0.01461	12,238	837,612	0.02545250	21,319	235,346
64	0.01589	13,115	825,374	0.02401179	19,819	214,027
65	0.01727	14,028	812,259	0.02265264	18,400	194,208
66	0.01878	14,991	798,231	0.02137041	17,059	175,808
67	0.02043	16,002	783,240	0.02016077	15,791	158,749
68	0.02221	17,040	767,238	0.01901959	14,593	142,958
69	0.02416	18,125	750,198	0.01794301	13,461	128,365
70	0.02654	19,429	732,073	0.01692737	12,392	114,904
71	0.02895	20,631	712,644	0.01596921	11,380	102,512
72	0.03159	21,861	692,013	0.01506530	10,425	91,132
73	0.03447	23,100	670,152	0.01421254	9,525	80,707
74	0.03762	24,342	647,052	0.01340806	8,676	71,182
75	0.04106	25,568	622,710	0.01264911	7,877	62,506
76	0.04482	26,764	597,142	0.01193313	7,126	54,629
77	0.04892	27,903	570,378	0.01125767	6,421	47,503
78	0.05340	28,968	542,475	0.01062044	5,761	41,082
79	0.05828	29,927	513,507	0.01001928	5,145	35,321
80	0.06360	30,756	483,580	0.00945215	4,571	30,176
81	0.06940	31,426	452,824	0.00891713	4,038	25,605
82	0.07572	31,908	421,398	0.00841238	3,545	21,567
83	0.08260	32,172	389,490	0.00793621	3,091	18,022
84	0.09008	32,187	357,318	0.00748699	2,675	14,931
85	0.09821	31,931	325,131	0.00706320	2,296	12,256
86	0.10703	31,381	293,200	0.00666340	1,954	9,960

87	0.11661	30,531	261,819	0.00628622	1,646	8,006
88	0.12699	29,371	231,288	0.00593040	1,372	6,360
89	0.13823	27,911	201,917	0.00559472	1,130	4,988
90	0.15038	26,167	174,006	0.00527803	918	3,858
91	0.16351	24,173	147,839	0.00497928	736	2,940
92	0.17766	21,971	123,666	0.00469743	581	2,204
93	0.19290	19,617	101,695	0.00443154	451	1,623
94	0.20929	17,178	82,078	0.00418070	343	1,172
95	0.22686	14,723	64,900	0.00394405	256	829
96	0.24568	12,327	50,177	0.00372081	187	573
97	0.26579	10,060	37,850	0.00351019	133	386
98	0.28721	7,982	27,790	0.00331150	92	253
99	0.30998	6,140	19,808	0.00312406	62	161
100	0.33410	4,566	13,668	0.00294723	40	99
101	0.35957	3,273	9,102	0.00278040	25	59
102	0.38638	2,252	5,829	0.00262302	15	34
103	0.41448	1,483	3,577	0.00247455	9	19
104	0.44380	929	2,094	0.00233448	5	10
105	0.47426	553	1,165	0.00220234	3	5
106	0.50574	310	612	0.00207768	1	2
107	0.53808	163	302	0.00196007	1	1
108	0.57111	79	139	0.00184913	0	0
109	0.60461	60	60	0.00174446	0	0
110	1.00000000	0	0	0.00164572	0	0

Tabla de Mortalidad para Mujeres Acticos cotizantes y Pensionados, del Sistema de Ahorro para Pensiones

De cero a menores de 70		De 70 a menores de 110	
c	1.098431460	c	1.112934780
g	0.999787760	g	0.999931640
s	0.999833050	s	0.998582180

TABLAS DE VEJEZ MUJERES **RV M ES**

i = 6%

EDAD	qx	dx	lx	v^x	Dx	Nx
0	0.00019	190	1,000,000	1.00000000	1,000,000	17,415,233
1	0.00019	190	999,810	0.94339623	943,217	16,415,233
2	0.00019	190	999,620	0.88999644	889,658	15,472,016
3	0.00019	190	999,430	0.83961928	839,141	14,582,358
4	0.00020	200	999,240	0.79209366	791,492	13,743,217
5	0.00020	200	999,040	0.74725817	746,541	12,951,725
6	0.00020	200	998,840	0.70496054	704,143	12,205,184
7	0.00021	210	998,640	0.66505711	664,153	11,501,041
8	0.00021	210	998,430	0.62741237	626,427	10,836,888
9	0.00022	220	998,220	0.59189846	590,845	10,210,461
10	0.00022	220	998,000	0.55839478	557,278	9,619,616
11	0.00023	229	997,780	0.52678753	525,618	9,062,338
12	0.00023	229	997,551	0.49696936	495,752	8,536,720
13	0.00024	239	997,322	0.46883902	467,583	8,040,968
14	0.00024	239	997,083	0.44230096	441,011	7,573,385
15	0.00025	249	996,844	0.41726506	415,948	7,132,374
16	0.00026	259	996,595	0.39364628	392,306	6,716,426
17	0.00027	269	996,336	0.37136442	370,004	6,324,120
18	0.00028	279	996,067	0.35034379	348,966	5,954,116
19	0.00029	289	995,788	0.33051301	329,121	5,605,150
20	0.00030	299	995,499	0.31180473	310,401	5,276,029
21	0.00032	318	995,200	0.29415540	292,743	4,965,628
22	0.00033	328	994,882	0.27750510	276,085	4,672,885

23	0.00035	348	994,554	0.26179726	260,372	4,396,800
24	0.00037	368	994,206	0.24697855	245,548	4,136,428
25	0.00039	388	993,838	0.23299863	231,563	3,890,880
26	0.00041	407	993,450	0.21981003	218,370	3,659,317
27	0.00043	427	993,043	0.20736795	205,925	3,440,947
28	0.00046	457	992,616	0.19563014	194,186	3,235,022
29	0.00048	476	992,159	0.18455674	183,110	3,040,836
30	0.00052	516	991,683	0.17411013	172,662	2,857,726
31	0.00055	545	991,167	0.16425484	162,804	2,685,064
32	0.00059	584	990,622	0.15495740	153,504	2,522,260
33	0.00063	624	990,038	0.14618622	144,730	2,368,756
34	0.00068	673	989,414	0.13791153	136,452	2,224,026
35	0.00073	722	988,741	0.13010522	128,640	2,087,574
36	0.00078	771	988,019	0.12274077	121,270	1,958,934
37	0.00084	829	987,248	0.11579318	114,317	1,837,664
38	0.00091	898	986,419	0.10923885	107,755	1,723,347
39	0.00098	966	985,521	0.10305552	101,563	1,615,592
40	0.00106	1,044	984,555	0.09722219	95,721	1,514,029
41	0.00115	1,131	983,511	0.09171905	90,207	1,418,308
42	0.00124	1,218	982,380	0.08652740	85,003	1,328,101
43	0.00135	1,325	981,162	0.08162962	80,092	1,243,098
44	0.00147	1,440	979,837	0.07700908	75,456	1,163,006
45	0.00159	1,556	978,397	0.07265007	71,081	1,087,550
46	0.00173	1,690	976,841	0.06853781	66,951	1,016,469
47	0.00189	1,843	975,151	0.06465831	63,052	949,518
48	0.00206	2,005	973,308	0.06099840	59,370	886,466
49	0.00224	2,176	971,303	0.05754566	55,894	827,096
50	0.00245	2,374	969,127	0.05428836	52,612	771,202
51	0.00267	2,581	966,753	0.05121544	49,513	718,590
52	0.00292	2,815	964,172	0.04831645	46,585	669,077
53	0.00319	3,067	961,357	0.04558156	43,820	622,492
54	0.00349	3,344	958,290	0.04300147	41,208	578,672
55	0.00381	3,638	954,946	0.04056742	38,740	537,464

56	0.00417	3,967	951,308	0.03827115	36,408	498,724
57	0.00456	4,320	947,341	0.03610486	34,204	462,316
58	0.00499	4,706	943,021	0.03406119	32,120	428,112
59	0.00547	5,133	938,315	0.03213320	30,151	395,992
60	0.00599	5,590	933,182	0.03031434	28,289	365,841
61	0.00656	6,085	927,592	0.02859843	26,528	337,552
62	0.00719	6,626	921,507	0.02697965	24,862	311,024
63	0.00788	7,209	914,881	0.02545250	23,286	286,162
64	0.00863	7,833	907,672	0.02401179	21,795	262,876
65	0.00946	8,512	899,839	0.02265264	20,384	241,081
66	0.01037	9,243	891,327	0.02137041	19,048	220,697
67	0.01137	10,029	882,084	0.02016077	17,783	201,649
68	0.01246	10,866	872,055	0.01901959	16,586	183,866
69	0.01367	11,772	861,189	0.01794301	15,452	167,280
70	0.01512	12,843	849,417	0.01692737	14,378	151,828
71	0.01666	13,937	836,574	0.01596921	13,359	137,450
72	0.01837	15,112	822,637	0.01506530	12,393	124,091
73	0.02026	16,360	807,525	0.01421254	11,477	111,698
74	0.02237	17,698	791,165	0.01340806	10,608	100,221
75	0.02471	19,112	773,467	0.01264911	9,784	89,613
76	0.02730	20,594	754,355	0.01193313	9,002	79,829
77	0.03018	22,145	733,761	0.01125767	8,260	70,827
78	0.03338	23,754	711,616	0.01062044	7,558	62,567
79	0.03692	25,396	687,862	0.01001928	6,892	55,009
80	0.04085	27,062	662,466	0.00945215	6,262	48,117
81	0.04521	28,727	635,404	0.00891713	5,666	41,855
82	0.05003	30,352	606,677	0.00841238	5,104	36,189
83	0.05537	31,911	576,325	0.00793621	4,574	31,085
84	0.06128	33,362	544,414	0.00748699	4,076	26,511
85	0.06781	34,654	511,052	0.00706320	3,610	22,435
86	0.07502	35,739	476,398	0.00666340	3,174	18,825
87	0.08299	36,570	440,659	0.00628622	2,770	15,651

88	0.09177	37,083	404,089	0.00593040	2,396	12,881
89	0.10144	37,229	367,006	0.00559472	2,053	10,485
90	0.11209	36,965	329,777	0.00527803	1,741	8,432
91	0.12379	36,247	292,812	0.00497928	1,458	6,691
92	0.13663	35,054	256,565	0.00469743	1,205	5,233
93	0.15071	33,384	221,511	0.00443154	982	4,028
94	0.16610	31,248	188,127	0.00418070	787	3,046
95	0.18290	28,693	156,879	0.00394405	619	2,259
96	0.20120	25,791	128,186	0.00372081	477	1,640
97	0.22108	22,637	102,395	0.00351019	359	1,163
98	0.24263	19,352	79,758	0.00331150	264	804
99	0.26592	16,063	60,406	0.00312406	189	540
100	0.29099	12,903	44,343	0.00294723	131	351
101	0.31789	9,994	31,440	0.00278040	87	220
102	0.34662	7,434	21,446	0.00262302	56	133
103	0.37719	5,285	14,012	0.00247455	35	77
104	0.40952	3,574	8,727	0.00233448	20	42
105	0.44354	2,286	5,153	0.00220234	11	22
106	0.47910	1,374	2,867	0.00207768	6	11
107	0.51601	770	1,493	0.00196007	3	5
108	0.55402	401	723	0.00184913	1	2
109	0.59283	322	322	0.00174446	1	1
110	1.000000	0	0	0.00164572	0	0

Anexo No. 2

EL SALVADOR INDICADORES DEL CRECIMIENTO DEMOGRÁFICO ESTIMADOS Y PROYECTADOS POR QUINQUENIOS

(Período / Period 1950-2015)

Indicadores demográficos/ *Demographic indicators*	Quinquenio / Quinquennia 1950-1955	1955-1960	1960-1965	1965-1970	1970-1975	1975-1980	1980-1985	1985-1990	1990-1995	1995-2000	2000-2005	2005-2010	2010-2015
Fecundidad / Fertility													
Nacimientos anuales (en miles)/													
Annual births (in thousands)	100	117	133	151	165	175	157	152	159	166	166	165	164
% de nacimientos según edad de la madre /													
% of birts by age of the mother													
15-19	14.9	14.5	17.2	18.0	18.5	18.9	21.4	22.4	22.3	19.2	17.3	17.0	17.2
35 y más / and over	12.6	13.9	14.6	14.4	13.2	11.9	11.5	10.9	10.4	10.5	11.4	12.9	14.5
Tasa bruta de natalidad (por mil) /													
Crude birth rate (per thousand)	48.1	48.8	47.5	45.6	42.7	40.2	33.6	30.7	29.6	27.7	25.3	23.1	21.2
Tasa global de fecundidad/													
Total fertility rate	6.5	6.8	6.8	6.6	6.1	5.6	4.5	3.9	3.5	3.2	2.9	2.7	2.5
Tasa bruta de reproducción/													
Gross reproduction rate	3.2	3.3	3.3	3.2	3.0	2.7	2.2	1.9	1.7	1.5	1.4	1.3	1.2
Edad media de la fecundidad /													
Mean age of fertility	28.4	28.6	28.7	28.7	28.5	28.2	27.9	27.6	27.5	27.5	27.6	27.5	27.5
Mortalidad / Mortality													
Muertes anuales (en miles)/													
Annual deaths (in thousands)	41	42	41	41	43	49	51	39	36	36	39	42	45
% de defunciones por edades/ % of deaths by age:													
0-14	58.8	61.3	62.8	63.3	62.3	51.9	40.8	34.1	26.7	22.9	18.9	15.6	12.7
15-64	28.0	26.3	24.6	22.8	21.6	31.4	39.9	39.0	39.4	38.6	38.9	39.2	39.2
65 y más/ and over	13.2	12.4	12.6	13.9	16.1	16.8	19.3	26.9	33.9	38.5	42.2	45.2	48.1
Tasa bruta de mortalidad (por mil)/													
Crude death rate (per thousand)	19.8	17.4	14.8	12.5	11.1	11.3	10.8	7.9	6.7	6.1	5.9	5.8	5.8
Esperanza de vida al nacer /													
Life expectancy at birth													
Ambos sexos / Both sexes	45.3	48.6	52.3	55.9	58.3	57.1	57.1	63.4	67.1	69.4	70.6	71.8	72.9
Hombres / Males	44.1	47.3	50.8	54.1	56.1	52.2	50.8	59.0	63.3	66.5	67.7	68.8	69.8
Mujeres / Females	46.5	50.0	54.0	57.8	60.6	62.2	63.8	68.0	71.1	72.5	73.7	74.9	76.0
Tasa de mortalidad infantil (por mil) /													
Infant mortality rate (per thousand):													
Ambos sexos / Both sexes	151.1	137.0	122.7	110.3	105.0	95.0	77.0	54.0	40.2	32.0	26.4	21.5	17.5
Hombres / Males	161.3	146.0	130.7	117.4	112.5	101.9	82.7	59.9	43.9	34.9	28.6	23.2	18.7
Mujeres / Females	140.3	127.6	114.2	102.8	97.1	87.7	71.0	47.9	36.3	29.0	24.1	19.8	16.3
Crecimiento natural / Natural increase													
Crecimiento anual (en miles)/													
Annual increase (in thousands)	59	75	92	109	122	126	107	112	123	129	127	124	119
Tasa de crecimiento natural (por mil)/													
Natural growth rate (per thousand)	28.2	31.4	32.8	33.1	31.6	28.9	22.8	22.8	22.9	21.6	19.3	17.3	15.4
Migración / Migration													
Migración anual (en miles)/													
Annual migration (in thousands)	-4.0392	-4.3872	-4.6646	7.798	-17.6	-32.2	-69	-43.8	-11.4	-7.6	-7.6	-7.6	-7.6
Tasa de migración (por mil)/													
Migration rate (per thousand)	-1.9	-1.8	-1.7	2.4	-4.6	-7.4	-14.8	-8.9	-2.1	-1.3	-1.2	-1.1	-1.0
Crecimiento total / Total increase													
Crecimiento anual (en miles)/													
Annual increase (in thousands)	55	71	87	117	104	94	38	69	112	122	120	116	111
Tasa de crecimiento total (por mil)													
Total growth rate (per thousand)	26.2	29.6	31.1	35.6	27.1	21.5	7.8	13.8	20.7	20.4	18.2	16.2	14.4

EL SALVADOR: POBLACIÓN OBJETIVO DE EXPUESTOS Y FALLECIDOS, 2007

	Población Expuesta			Defunciones		
Edad	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total
0	51,787	50,097	**101,884**	579	402	**981**
1	53,230	51,477	**104,707**	76	68	**144**
2	55,845	54,261	**110,106**	36	23	**59**
3	59,752	57,127	**116,879**	21	20	**41**
4	62,658	59,659	**122,317**	27	15	**42**
5	62,274	59,738	**122,012**	17	18	**35**
6	69,088	66,249	**135,337**	27	14	**41**
7	75,310	72,672	**147,982**	23	13	**36**
8	71,525	68,511	**140,036**	21	16	**37**
9	70,953	68,407	**139,360**	14	16	**30**
10	74,244	70,664	**144,908**	23	18	**41**
11	71,744	69,499	**141,243**	24	13	**37**
12	74,093	72,835	**146,928**	35	17	**52**
13	68,251	66,194	**134,445**	43	33	**76**
14	71,191	67,632	**138,823**	49	32	**81**
15	64,523	63,752	**128,275**	87	45	**132**
16	61,880	61,630	**123,510**	116	48	**164**
17	61,255	61,624	**122,879**	141	40	**181**
18	57,590	58,584	**116,174**	162	43	**205**
19	53,136	56,591	**109,727**	190	50	**240**
20	50,243	55,085	**105,328**	163	43	**206**
21	45,994	51,623	**97,617**	176	48	**224**
22	46,006	51,429	**97,435**	201	35	**236**
23	42,864	49,278	**92,142**	213	37	**250**
24	42,894	51,126	**94,020**	213	41	**254**
25	42,616	50,552	**93,168**	231	43	**274**
26	41,993	50,707	**92,700**	216	53	**269**
27	43,473	52,214	**95,687**	270	45	**315**
28	39,209	48,076	**87,285**	270	43	**313**
29	39,672	49,378	**89,050**	238	60	**298**
30	41,911	50,744	**92,655**	251	63	**314**
31	33,494	42,933	**76,427**	182	44	**226**
32	35,940	45,312	**81,252**	208	55	**263**
33	33,124	41,990	**75,114**	214	46	**260**
34	33,931	42,870	**76,801**	181	42	**223**
35	34,628	42,848	**77,476**	216	66	**282**
36	31,398	40,111	**71,509**	177	57	**234**
37	31,414	38,801	**70,215**	174	49	**223**
38	29,639	37,419	**67,058**	151	83	**234**
39	29,435	37,454	**66,889**	146	54	**200**
40	31,769	39,411	**71,180**	193	60	**253**
41	24,732	32,964	**57,696**	157	68	**225**
42	26,840	34,653	**61,493**	148	87	**235**
43	24,578	32,639	**57,217**	159	72	**231**
44	24,299	31,746	**56,045**	137	83	**220**
45	24,451	31,422	**55,873**	188	96	**284**
46	21,989	29,308	**51,297**	157	105	**262**
47	22,251	28,713	**50,964**	208	66	**274**
48	20,682	26,481	**47,163**	168	91	**259**
49	20,584	26,241	**46,825**	170	103	**273**
50	22,897	28,057	**50,954**	188	89	**277**

	Población Expuesta			Defunciones		
Edad	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total
50	17,664	22,874	**40,538**	179	110	**289**
51	19,081	24,360	**43,441**	187	125	**312**
52	17,671	22,344	**40,015**	191	108	**299**
53	17,962	22,824	**40,786**	167	117	**284**
54	17,848	22,561	**40,409**	280	155	**435**
55	17,114	21,361	**38,475**	170	118	**288**
56	16,816	20,974	**37,790**	203	148	**351**
57	14,462	17,853	**32,315**	190	128	**318**
58	15,478	18,608	**34,086**	219	137	**356**
59	17,461	19,979	**37,440**	211	129	**340**
60	12,470	15,424	**27,894**	200	142	**342**
61	13,590	17,093	**30,683**	215	165	**380**
62	12,274	15,528	**27,802**	200	167	**367**
63	12,412	15,633	**28,045**	189	140	**329**
64	12,802	15,513	**28,315**	294	207	**501**
65	11,774	14,915	**26,689**	237	196	**433**
66	11,864	14,597	**26,461**	254	231	**485**
67	9,694	12,291	**21,985**	213	201	**414**
68	9,647	12,060	**21,707**	286	232	**518**
69	10,861	13,101	**23,962**	265	251	**516**
70	8,525	10,638	**19,163**	256	197	**453**
71	8,591	10,717	**19,308**	265	245	**510**
72	7,461	9,522	**16,983**	266	261	**527**
73	8,011	10,030	**18,041**	290	259	**549**
74	8,067	9,886	**17,953**	307	291	**598**
75	7,535	9,745	**17,280**	322	348	**670**
76	6,897	8,872	**15,769**	288	275	**563**
77	5,825	7,123	**12,948**	303	325	**628**
78	5,334	6,700	**12,034**	323	304	**627**
79	5,717	7,089	**12,806**	338	340	**678**
80	4,124	5,274	**9,398**	301	336	**637**
81	3,841	5,220	**9,061**	300	320	**620**
82	3,438	4,508	**7,946**	284	303	**587**
83	3,281	4,378	**7,659**	261	305	**566**
84	3,263	4,413	**7,676**	266	334	**600**
85	3,096	4,286	**7,382**	252	329	**581**
86	2,750	3,758	**6,508**	246	270	**516**
87	1,767	2,358	**4,125**	219	264	**483**
88	1,595	2,219	**3,814**	213	238	**451**
89	1,405	2,091	**3,496**	162	236	**398**
90	786	1,143	**1,929**	132	174	**306**
91	826	1,206	**2,032**	131	170	**301**
92	673	990	**1,663**	121	165	**286**
93	559	869	**1,428**	103	130	**233**
94	482	816	**1,298**	71	134	**205**
95	416	674	**1,090**	69	102	**171**
96	356	588	**944**	57	90	**147**
97	285	428	**713**	48	60	**108**
98	241	520	**761**	98	149	**247**
	2719,371	**3024,742**	**5744,113**	**18,317**	**13,032**	**31,349**

Fuente: DIGESTYC, Censo 2007.

Anexo No. 4

Comprobación del Método Whittaker-Henderson-Weinert

sig	0.2
lam	0.006666667

Edad	*yt*	*dn*	*fn-2*	σ	*en-1*	*bj*	*xn*	*Comprobación*
0	0.011180412072528	1.006666666666670	0.993377483443709	2.000000000000000	1.986754966887420	0.000074042464056	0.004199298148923	0.004199298148923
1	0.001320978300989	1.033156732891830	0.967907354386565	2.013245033112580	1.948634673731890	0.000151856388411	0.003424785833557	0.003424785833557
2	0.000423877186193	1.090210104981270	0.917254385582108	2.051365326268110	1.881623841950490	0.000215103036098	0.002696814277681	0.002696814277681
3	0.000350097151960	1.178861405823470	0.848276137517172	2.118376158049510	1.796967945158700	0.000247469720349	0.002047898857237	0.002047898857237
4	0.000251428954558	1.282758229281160	0.779570130343572	2.203032054841300	1.717417986143700	0.000242295941093	0.001495402034220	0.001495402034220
5	0.000301315745422	1.374863654113940	0.727344851256886	2.282582013856300	1.660224275349960	0.000209711541512	0.001045367592594	0.001045367592594
6	0.000211323944512	1.437498466441680	0.695652916051701	2.339775724650040	1.627671805759790	0.000165423952448	0.000695546162454	0.000695546162454
7	0.000178885953325	1.470934836595730	0.679839769322723	2.372328194240210	1.612803052330060	0.000121375859271	0.000438728028251	0.000438728028251
8	0.000233539139700	1.484915597815690	0.673438949305267	2.387196947669940	1.607631404223590	0.000083557845565	0.000264475326315	0.000264475326315
9	0.000233894192115	1.489094116203060	0.671549225209372	2.392368595776410	1.606593276908880	0.000053490553997	0.000160617912476	0.000160617912476
10	0.000254726593456	1.489664415499060	0.671292131030049	2.393406723091120	1.606675099565480	0.000030952913152	0.000114779401320	0.000114779401320
11	0.000187053051123	1.489690456334180	0.671280396372272	2.393324900434520	1.606592087811310	0.000014660345501	0.000115071915965	0.000115071915965
12	0.000233404269925	1.490277687036730	0.671015884286910	2.393407912188690	1.606014726656580	0.000003818137587	0.000150540560810	0.000150540560810
13	0.000498534610388	1.491537916422980	0.670448929919399	2.393985273343420	1.605044864755900	-0.000001473928820	0.000210710314485	0.000210710314485
14	0.000473148805299	1.493197013098660	0.669703991655339	2.394955135244100	1.603911013908430	-0.000002807651014	0.000285658580352	0.000285658580352
15	0.000705860208307	1.494922817512700	0.668930856018260	2.396088986091570	1.602817856562160	-0.000000364256044	0.000367381590411	0.000367381590411
16	0.000778841473308	1.496468462191840	0.668239943082614	2.397182143437840	1.601892859089560	0.000004762638029	0.000449125511492	0.000449125511492
17	0.000649097754122	1.497706853138320	0.667687403515969	2.398107140910440	1.601185930267600	0.000010755432687	0.000526393034548	0.000526393034548
18	0.000733988802403	1.498611310284010	0.667284434020779	2.398814069732400	1.600691288842470	0.000017298214958	0.000596884956944	0.000596884956944
19	0.000883532717217	1.499218478177290	0.667014190764092	2.399308711157530	1.600372958365980	0.000024432721037	0.000659120107505	0.000659120107505
20	0.000780611781792	1.499593452537450	0.666847403413179	2.399627041634020	1.600185061873700	0.000031026745235	0.000712531340696	0.000712531340696
21	0.000929818104333	1.499805129811640	0.666753286892403	2.399814938126300	1.600084497929200	0.000037483991812	0.000758047595047	0.000758047595047
22	0.000680549884307	1.499912582858660	0.666705520993839	2.399915502070800	1.600036915149300	0.000042312397542	0.000797051678693	0.000797051678693
23	0.000750842160802	1.499959983221920	0.666684452375856	2.399963084850700	1.600018074945960	0.000046046429343	0.000832071536498	0.000832071536498
24	0.000801940304346	1.499976830708650	0.666676964288547	2.399981925054040	1.600012664142410	0.000049029825168	0.000864858434698	0.000864858434698
25	0.000850609273619	1.499980740491460	0.666675226558147	2.399987335857590	1.600012100869540	0.000051530657197	0.000896622110357	0.000896622110357
26	0.001045220580985	1.499980923072330	0.666675145409020	2.399987899130460	1.600012281632690	0.000054408183107	0.000928152846337	0.000928152846337
27	0.000861837821274	1.499981325729960	0.666674966445570	2.399987718367310	1.600011731612310	0.000056529976669	0.000959934173255	0.000959934173255
28	0.000894417172810	1.499983016144490	0.666674215132363	2.399988268387690	1.600010295154240	0.000058151223602	0.000993230073291	0.000993230073291
29	0.001215116043582	1.499985762551390	0.666672994481666	2.399989704845760	1.600008323254690	0.000060755944268	0.001028650552947	0.001028650552947
30	0.001241526091755	1.499988948055520	0.666671578678182	2.399991676745310	1.600006239950290	0.000063959976429	0.001066146866054	0.001066146866054
31	0.001024852677428	1.499992013563740	0.666670216212791	2.399993760049710	1.600004358921690	0.000066386898789	0.001106913369715	0.001106913369715
32	0.001213806497175	1.499994610524100	0.666669061997895	2.399995641078310	1.600002842836720	0.000068973720973	0.001153313615870	0.001153313615870
33	0.001095498928316	1.499996601932850	0.666668176922154	2.399997157163280	1.600001729384400	0.000070968865495	0.001207164085177	0.001207164085177
34	0.000979706088174	1.499998002689870	0.666667554361238	2.399998270615600	1.600000977542500	0.000071921914688	0.001270684544169	0.001270684544169
35	0.001540328603435	1.499998910659240	0.666667150818469	2.399999022457500	1.600000510268850	0.000074608362671	0.001345350325002	0.001345350325002
36	0.001421056568024	1.499999451728690	0.666666910342893	2.399999489731150	1.600000244643590	0.000077741223911	0.001430696903458	0.001430696903458
37	0.001262854050153	1.499999745133880	0.666666779940518	2.399999755356410	1.600000108761490	0.000080259721669	0.001527559610505	0.001527559610505
38	0.002218124482215	1.499999886725960	0.666666717010690	2.399999891238510	1.600000048317990	0.000086446396533	0.001636709508214	0.001636709508214
39	0.001441768569445	1.499999944781370	0.666666691208282	2.399999951682010	1.600000026687880	0.000091215610738	0.001757152954915	0.001757152954915
40	0.001522417599147	1.499999962913840	0.666666683149404	2.399999973312120	1.600000021766650	0.000095080346013	0.001891772408769	0.001891772408769
41	0.002062856449460	1.499999965919040	0.666666681813759	2.399999978233350	1.600000021841920	0.000100486397939	0.002041347765364	0.002041347765364
42	0.002510605142412	1.499999965923290	0.666666681811873	2.399999978158080	1.600000021787210	0.000108549585446	0.002204196554892	0.002204196554892
43	0.002205949937192	1.499999967510670	0.666666681106369	2.399999978212790	1.600000020130480	0.000116492627640	0.002378779698772	0.002378779698772
44	0.002614502614503	1.499999971401190	0.666666679377248	2.399999979869520	1.600000017085080	0.000125641826250	0.002565600842340	0.002565600842340
45	0.003055184265801	1.499999976764880	0.666666676993389	2.399999982914920	1.600000013394080	0.000136943767412	0.002764011432521	0.002764011432521
46	0.003582639552341	1.499999982479750	0.666666674453446	2.399999986605920	1.600000009758880	0.000151271653021	0.002973688928055	0.002973688928055
47	0.002298610385540	1.499999987682490	0.666666672141115	2.399999990241120	1.600000006632760	0.000160954846022	0.003196251939903	0.003196251939903
48	0.003436426116838	1.499999991908820	0.666666670262747	2.399999993367240	1.600000004208750	0.000171952989798	0.003437378749856	0.003437378749856
49	0.003925155291338	1.499999995036950	0.666666668872468	2.399999995791250	1.600000002488090	0.000185266687476	0.003696763362674	0.003696763362674

Comprobación del Método Whittaker-Henderson-Weinert

50	0.003172113910967	1.499999997166520	0.666666667925990	2.399999997511910	1.600000001363650	0.000195889657329	0.003974093432233	0.003974093432233
51	0.004808953396870	1.499999998502370	0.666666667332280	2.399999998636350	1.600000000688370	0.000211285452837	0.004270579225263	0.004270579225263
52	0.005131362889984	1.499999999270430	0.666666666990919	2.399999999311630	1.600000000319290	0.000230269676861	0.004582084478355	0.004582084478355
53	0.004833512352309	1.499999999669480	0.666666666813565	2.399999999680710	1.600000000139690	0.000249056791491	0.004908062089244	0.004908062089244
54	0.005126182965300	1.499999999851350	0.666666666732735	2.399999999860300	1.600000000065430	0.000267760783853	0.005251626811741	0.005251626811741
55	0.006870262842959	1.499999999919570	0.666666666702411	2.399999999934570	1.600000000042170	0.000292913894686	0.005615396401412	0.005615396401412
56	0.005524085951032	1.499999999937430	0.666666666694476	2.399999999957830	1.600000000038630	0.000314706535378	0.006001152321512	0.006001152321512
57	0.007056355487747	1.499999999939000	0.666666666693778	2.399999999961370	1.600000000039310	0.000339616106765	0.006419041811576	0.006419041811576
58	0.007169663361900	1.499999999939660	0.666666666693486	2.399999999960690	1.600000000038160	0.000365446584408	0.006876031668665	0.006876031668665
59	0.007362424763543	1.499999999944210	0.666666666691464	2.399999999961840	1.600000000034070	0.000391025685053	0.007383337447684	0.007383337447684
60	0.006456779618600	1.499999999952460	0.666666666687797	2.399999999965930	1.600000000028000	0.000410706838120	0.007954132248160	0.007954132248160
61	0.009206431535270	1.499999999962530	0.666666666683320	2.399999999972000	1.600000000021300	0.000437364624449	0.008601449751723	0.008601449751723
62	0.009653074357924	1.499999999972540	0.666666666678872	2.399999999978700	1.600000000015090	0.000468881393074	0.009328341289141	0.009328341289141
63	0.010754765584750	1.499999999981210	0.666666666675017	2.399999999984910	1.600000000009980	0.000506432770773	0.010141891403072	0.010141891403072
64	0.008955414827608	1.499999999987990	0.666666666672005	2.399999999990020	1.600000000006160	0.000537506681532	0.011051349523301	0.011051349523300
65	0.013343647263585	1.499999999992840	0.666666666669850	2.399999999993840	1.600000000003530	0.000581693942217	0.012070050907486	0.012070050907486
66	0.013141133087496	1.499999999996030	0.666666666668430	2.399999999996470	1.600000000001880	0.000630777555803	0.013197357915320	0.013197357915320
67	0.015825169555388	1.499999999997970	0.666666666667569	2.399999999998120	1.600000000000910	0.000691782214720	0.014441123548865	0.014441123548865
68	0.016353429338540	1.499999999999040	0.666666666667092	2.399999999999090	1.600000000000410	0.000759015081187	0.015808825978001	0.015808825978001
69	0.019237147595357	1.499999999999570	0.666666666666856	2.399999999999590	1.600000000000180	0.000838734420509	0.017317170345981	0.017317170345981
70	0.019158842836425	1.499999999999800	0.666666666666755	2.399999999999820	1.600000000000090	0.000921115431296	0.018986492485132	0.018986492485132
71	0.018518518518519	1.499999999999880	0.666666666666721	2.399999999999910	1.600000000000070	0.000996932936484	0.020849928076109	0.020849928076108
72	0.022860875244938	1.499999999999890	0.666666666666714	2.399999999999930	1.600000000000070	0.001082619634154	0.022941761801907	0.022941761801907
73	0.027410207939509	1.499999999999890	0.666666666666714	2.399999999999930	1.600000000000070	0.001189392603388	0.025280735615139	0.025280735615139
74	0.025822532402792	1.499999999999900	0.666666666666712	2.399999999999930	1.600000000000060	0.001296048553331	0.027885052224706	0.027885052224706
75	0.029435565446085	1.499999999999910	0.666666666666707	2.399999999999940	1.600000000000050	0.001411574018387	0.030787110821669	0.030787110821669
76	0.035710620831196	1.499999999999930	0.666666666666700	2.399999999999950	1.600000000000040	0.001553199930893	0.034005560464943	0.034005560464944
77	0.030996393146979	1.499999999999940	0.666666666666692	2.399999999999960	1.600000000000030	0.001681832291157	0.037550039910942	0.037550039910942
78	0.045626842622491	1.499999999999960	0.666666666666684	2.399999999999970	1.600000000000020	0.001858251012467	0.041441554985185	0.041441554985185
79	0.045373134328358	1.499999999999980	0.666666666666677	2.399999999999980	1.600000000000010	0.002053638467302	0.045657420534765	0.045657420534765
80	0.047961630695444	1.499999999999990	0.666666666666672	2.399999999999990	1.600000000000000	0.002260150342462	0.050202853324360	0.050202853324360
81	0.063708759954494	1.500000000000000	0.666666666666668	2.400000000000000	1.600000000000000	0.002530298280648	0.055081174877268	0.055081174877268
82	0.061302681992337	1.500000000000000	0.666666666666666	2.400000000000000	1.600000000000000	0.002814166718472	0.060280765232598	0.060280765232598
83	0.067213842058563	1.500000000000000	0.666666666666665	2.400000000000000	1.600000000000000	0.003114529416050	0.065847521663303	0.065847521663303
84	0.069666514390133	1.500000000000000	0.666666666666665	2.400000000000000	1.600000000000000	0.003416764872877	0.071834154220738	0.071834154220738
85	0.075685474733741	1.500000000000000	0.666666666666665	2.400000000000000	1.600000000000000	0.003726850740275	0.078302481758891	0.078302481758891
86	0.076761549230051	1.500000000000010	0.666666666666664	2.400000000000000	1.600000000000000	0.004026280376878	0.085299872199546	0.085299872199546
87	0.071846726982438	1.500000000000010	0.666666666666664	2.400000000000000	1.600000000000000	0.004276800229411	0.092856246750987	0.092856246750987
88	0.111959287531807	1.500000000000010	0.666666666666664	2.400000000000000	1.599999999999990	0.004656290282613	0.100944604468368	0.100944604468368
89	0.107255520504732	1.500000000000010	0.666666666666663	2.400000000000000	1.599999999999990	0.005075555501483	0.109397880941717	0.109397880941717
90	0.112864658058345	1.500000000000010	0.666666666666662	2.400000000000010	1.599999999999990	0.005518315983113	0.118122442981488	0.118122442981488
91	0.152230971128609	1.500000000000010	0.666666666666661	2.400000000000010	1.599999999999990	0.006122183999230	0.127010374995221	0.127010374995221
92	0.140961857379768	1.500000000000010	0.666666666666662	2.400000000000010	1.599999999999990	0.006743114220603	0.135918709490965	0.135918709490965
93	0.166666666666667	1.500000000000010	0.666666666666662	2.400000000000010	1.599999999999990	0.007448267494218	0.144872616284330	0.144872616284330
94	0.149597238204833	1.500000000000010	0.666666666666662	2.400000000000010	1.599999999999990	0.008086695124591	0.153930886176848	0.153930886176848
95	0.164215686274510	1.500000000000010	0.666666666666663	2.400000000000010	1.599999999999990	0.008703048031087	0.163297603639266	0.163297603639266
96	0.151335311572700	1.500000000000010	0.666666666666663	2.400000000000010	1.600000000000000	0.009206348151446	0.173147962155854	0.173147962155854
97	0.153061224489796	1.500000000000010	0.666666666666664	2.400000000000000	1.600000000000000	0.009608397130433	0.183663275761782	0.183663275761782
98	0.140186915887850	0.500000000000005	1.999999999999980	0.400000000000004	0.799999999999999	0.029576768801689	0.194879440821663	0.194879440821663
99	0.286538461538462	0.020000000000000	49.999999999999700			0.206628340024968	0.206628340024968	0.206628340024968

$$A\hat{x} = \lambda y,$$

	$A\bar{x}$	=	λy		$A\bar{x}$	=	λy
0	0.0000745360805	=	0.0000745360805	**50**	0.0000211474261	=	0.0000211474261
1	0.0000088065220	=	0.0000088065220	**51**	0.0000320596893	=	0.0000320596893
2	0.0000028258479	=	0.0000028258479	**52**	0.0000342090859	=	0.0000342090859
3	0.0000023339810	=	0.0000023339810	**53**	0.0000322234157	=	0.0000322234157
4	0.0000016761930	=	0.0000016761930	**54**	0.0000341745531	=	0.0000341745531
5	0.0000020087716	=	0.0000020087716	**55**	0.0000458017523	=	0.0000458017523
6	0.0000014088263	=	0.0000014088263	**56**	0.0000368272397	=	0.0000368272397
7	0.0000011925730	=	0.0000011925730	**57**	0.0000470423699	=	0.0000470423699
8	0.0000015569276	=	0.0000015569276	**58**	0.0000477977557	=	0.0000477977557
9	0.0000015592946	=	0.0000015592946	**59**	0.0000490828318	=	0.0000490828318
10	0.0000016981773	=	0.0000016981773	**60**	0.0000430451975	=	0.0000430451975
11	0.0000012470203	=	0.0000012470203	**61**	0.0000613762102	=	0.0000613762102
12	0.0000015560285	=	0.0000015560285	**62**	0.0000643538291	=	0.0000643538291
13	0.0000033235641	=	0.0000033235641	**63**	0.0000716984372	=	0.0000716984372
14	0.0000031543254	=	0.0000031543254	**64**	0.0000597027655	=	0.0000597027655
15	0.0000047057347	=	0.0000047057347	**65**	0.0000889576484	=	0.0000889576484
16	0.0000051922765	=	0.0000051922765	**66**	0.0000876075539	=	0.0000876075539
17	0.0000043273184	=	0.0000043273184	**67**	0.0001055011304	=	0.0001055011304
18	0.0000048932587	=	0.0000048932587	**68**	0.0001090228623	=	0.0001090228623
19	0.0000058902181	=	0.0000058902181	**69**	0.0001282476506	=	0.0001282476506
20	0.0000052040785	=	0.0000052040785	**70**	0.0001277256189	=	0.0001277256189
21	0.0000061987874	=	0.0000061987874	**71**	0.0001234567901	=	0.0001234567901
22	0.0000045369992	=	0.0000045369992	**72**	0.0001524058350	=	0.0001524058350
23	0.0000050056144	=	0.0000050056144	**73**	0.0001827347196	=	0.0001827347196
24	0.0000053462687	=	0.0000053462687	**74**	0.0001721502160	=	0.0001721502160
25	0.0000056707285	=	0.0000056707285	**75**	0.0001962371030	=	0.0001962371030
26	0.0000069681372	=	0.0000069681372	**76**	0.0002380708055	=	0.0002380708055
27	0.0000057455855	=	0.0000057455855	**77**	0.0002066426210	=	0.0002066426210
28	0.0000059627812	=	0.0000059627812	**78**	0.0003041789508	=	0.0003041789508
29	0.0000081007736	=	0.0000081007736	**79**	0.0003024875622	=	0.0003024875622
30	0.0000082768406	=	0.0000082768406	**80**	0.0003197442046	=	0.0003197442046
31	0.0000068323512	=	0.0000068323512	**81**	0.0004247250664	=	0.0004247250664
32	0.0000080920433	=	0.0000080920433	**82**	0.0004086845466	=	0.0004086845466
33	0.0000073033262	=	0.0000073033262	**83**	0.0004480922804	=	0.0004480922804
34	0.0000065313739	=	0.0000065313739	**84**	0.0004644434293	=	0.0004644434293
35	0.0000102688574	=	0.0000102688574	**85**	0.0005045698316	=	0.0005045698316
36	0.0000094737105	=	0.0000094737105	**86**	0.0005117436615	=	0.0005117436615
37	0.0000084190270	=	0.0000084190270	**87**	0.0004789781799	=	0.0004789781799
38	0.0000147874965	=	0.0000147874965	**88**	0.0007463952502	=	0.0007463952502
39	0.0000096117905	=	0.0000096117905	**89**	0.0007150368034	=	0.0007150368034
40	0.0000101494507	=	0.0000101494507	**90**	0.0007524310537	=	0.0007524310537
41	0.0000137523763	=	0.0000137523763	**91**	0.0010148731409	=	0.0010148731409
42	0.0000167373676	=	0.0000167373676	**92**	0.0009397457159	=	0.0009397457159
43	0.0000147063329	=	0.0000147063329	**93**	0.0011111111111	=	0.0011111111111
44	0.0000174300174	=	0.0000174300174	**94**	0.0009973149214	=	0.0009973149214
45	0.0000203678951	=	0.0000203678951	**95**	0.0010947712418	=	0.0010947712418
46	0.0000238842637	=	0.0000238842637	**96**	0.0010089020772	=	0.0010089020772
47	0.0000153240692	=	0.0000153240692	**97**	0.0010204081633	=	0.0010204081633
48	0.0000229095074	=	0.0000229095074	**98**	0.0009345794393	=	0.0009345794393
49	0.0000261677019	=	0.0000261677019	**99**	0.0019102564103	=	0.0019102564103

Anexo No. 6

$$LDb = \lambda y,$$

Edad	LDb	=	Lam*y
0	0.000074536080484	=	0.000074536080484
1	0.000008806522007	=	0.000008806522007
2	0.000002825847908	=	0.000002825847908
3	0.000002333981013	=	0.000002333981013
4	0.000001676193030	=	0.000001676193030
5	0.000002008771636	=	0.000002008771636
6	0.000001408826297	=	0.000001408826297
7	0.000001192573022	=	0.000001192573022
8	0.000001556927598	=	0.000001556927598
9	0.000001559294614	=	0.000001559294614
10	0.000001698177290	=	0.000001698177290
11	0.000001247020341	=	0.000001247020341
12	0.000001556028466	=	0.000001556028466
13	0.000003323564069	=	0.000003323564069
14	0.000003154325369	=	0.000003154325369
15	0.000004705734722	=	0.000004705734722
16	0.000005192276489	=	0.000005192276489
17	0.000004327318361	=	0.000004327318361
18	0.000004893258683	=	0.000004893258683
19	0.000005890218115	=	0.000005890218115
20	0.000005204078545	=	0.000005204078545
21	0.000006198787362	=	0.000006198787362
22	0.000004536999229	=	0.000004536999229
23	0.000005005614405	=	0.000005005614405
24	0.000005346268696	=	0.000005346268696
25	0.000005670728491	=	0.000005670728491
26	0.000006968137207	=	0.000006968137207
27	0.000005745585475	=	0.000005745585475
28	0.000005962781152	=	0.000005962781152
29	0.000008100773624	=	0.000008100773624
30	0.000008276840612	=	0.000008276840612
31	0.000006832351183	=	0.000006832351183
32	0.000008092043315	=	0.000008092043315
33	0.000007303326189	=	0.000007303326189
34	0.000006531373921	=	0.000006531373921
35	0.000010268857356	=	0.000010268857356
36	0.000009473710453	=	0.000009473710453
37	0.000008419027001	=	0.000008419027001
38	0.000014787496548	=	0.000014787496548
39	0.000009611790463	=	0.000009611790463
40	0.000010149450661	=	0.000010149450661
41	0.000013752376330	=	0.000013752376330
42	0.000016737367616	=	0.000016737367616
43	0.000014706332915	=	0.000014706332915
44	0.000017430017430	=	0.000017430017430
45	0.000020367895105	=	0.000020367895105
46	0.000023884263682	=	0.000023884263682
47	0.000015324069237	=	0.000015324069237
48	0.000022909507446	=	0.000022909507446
49	0.000026167701942	=	0.000026167701942

Edad	LDb	=	Lam*y
50	0.000021147426073	=	0.000021147426073
51	0.000032059689312	=	0.000032059689312
52	0.000034209085933	=	0.000034209085933
53	0.000032223415682	=	0.000032223415682
54	0.000034174553102	=	0.000034174553102
55	0.000045801752286	=	0.000045801752286
56	0.000036827239674	=	0.000036827239674
57	0.000047042369918	=	0.000047042369918
58	0.000047797755746	=	0.000047797755746
59	0.000049082831757	=	0.000049082831757
60	0.000043045197457	=	0.000043045197457
61	0.000061376210235	=	0.000061376210235
62	0.000064353829053	=	0.000064353829053
63	0.000071698437232	=	0.000071698437232
64	0.000059702765517	=	0.000059702765517
65	0.000088957648424	=	0.000088957648424
66	0.000087607553917	=	0.000087607553917
67	0.000105501130369	=	0.000105501130369
68	0.000109022862257	=	0.000109022862257
69	0.000128247650636	=	0.000128247650636
70	0.000127725618909	=	0.000127725618909
71	0.000123456790123	=	0.000123456790123
72	0.000152405834966	=	0.000152405834966
73	0.000182734719597	=	0.000182734719597
74	0.000172150216019	=	0.000172150216019
75	0.000196237102974	=	0.000196237102974
76	0.000238070805541	=	0.000238070805541
77	0.000206642620980	=	0.000206642620980
78	0.000304178950817	=	0.000304178950817
79	0.000302487562189	=	0.000302487562189
80	0.000319744204636	=	0.000319744204636
81	0.000424725066363	=	0.000424725066363
82	0.000408684546616	=	0.000408684546616
83	0.000448092280390	=	0.000448092280390
84	0.000464443429268	=	0.000464443429268
85	0.000504569831558	=	0.000504569831558
86	0.000511743661534	=	0.000511743661534
87	0.000478978179883	=	0.000478978179883
88	0.000746395250212	=	0.000746395250212
89	0.000715036803365	=	0.000715036803365
90	0.000752431053722	=	0.000752431053722
91	0.001014873140857	=	0.001014873140857
92	0.000939745715865	=	0.000939745715865
93	0.001111111111111	=	0.001111111111111
94	0.000997314921366	=	0.000997314921366
95	0.001094771241830	=	0.001094771241830
96	0.001008902077151	=	0.001008902077151
97	0.001020408163265	=	0.001020408163265
98	0.000934579439252	=	0.000934579439252
99	0.001910256410256	=	0.001910256410256

$$L^{\mathrm{T}}\hat{x} = b,$$

Edad	LTx	=	b	Edad	LTx	=	b
0	0.00007404	=	0.00007404	50	0.00019589	=	0.00019589
1	0.00015186	=	0.00015186	51	0.00021129	=	0.00021129
2	0.00021510	=	0.00021510	52	0.00023027	=	0.00023027
3	0.00024747	=	0.00024747	53	0.00024906	=	0.00024906
4	0.00024230	=	0.00024230	54	0.00026776	=	0.00026776
5	0.00020971	=	0.00020971	55	0.00029291	=	0.00029291
6	0.00016542	=	0.00016542	56	0.00031471	=	0.00031471
7	0.00012138	=	0.00012138	57	0.00033962	=	0.00033962
8	0.00008356	=	0.00008356	58	0.00036545	=	0.00036545
9	0.00005349	=	0.00005349	59	0.00039103	=	0.00039103
10	0.00003095	=	0.00003095	60	0.00041071	=	0.00041071
11	0.00001466	=	0.00001466	61	0.00043736	=	0.00043736
12	0.00000382	=	0.00000382	62	0.00046888	=	0.00046888
13	-0.00000147	=	-0.00000147	63	0.00050643	=	0.00050643
14	-0.00000281	=	-0.00000281	64	0.00053751	=	0.00053751
15	-0.00000036	=	-0.00000036	65	0.00058169	=	0.00058169
16	0.00000476	=	0.00000476	66	0.00063078	=	0.00063078
17	0.00001076	=	0.00001076	67	0.00069178	=	0.00069178
18	0.00001730	=	0.00001730	68	0.00075902	=	0.00075902
19	0.00002443	=	0.00002443	69	0.00083873	=	0.00083873
20	0.00003103	=	0.00003103	70	0.00092112	=	0.00092112
21	0.00003748	=	0.00003748	71	0.00099693	=	0.00099693
22	0.00004231	=	0.00004231	72	0.00108262	=	0.00108262
23	0.00004605	=	0.00004605	73	0.00118939	=	0.00118939
24	0.00004903	=	0.00004903	74	0.00129605	=	0.00129605
25	0.00005153	=	0.00005153	75	0.00141157	=	0.00141157
26	0.00005441	=	0.00005441	76	0.00155320	=	0.00155320
27	0.00005653	=	0.00005653	77	0.00168183	=	0.00168183
28	0.00005815	=	0.00005815	78	0.00185825	=	0.00185825
29	0.00006076	=	0.00006076	79	0.00205364	=	0.00205364
30	0.00006396	=	0.00006396	80	0.00226015	=	0.00226015
31	0.00006639	=	0.00006639	81	0.00253030	=	0.00253030
32	0.00006897	=	0.00006897	82	0.00281417	=	0.00281417
33	0.00007097	=	0.00007097	83	0.00311453	=	0.00311453
34	0.00007192	=	0.00007192	84	0.00341676	=	0.00341676
35	0.00007461	=	0.00007461	85	0.00372685	=	0.00372685
36	0.00007774	=	0.00007774	86	0.00402628	=	0.00402628
37	0.00008026	=	0.00008026	87	0.00427680	=	0.00427680
38	0.00008645	=	0.00008645	88	0.00465629	=	0.00465629
39	0.00009122	=	0.00009122	89	0.00507556	=	0.00507556
40	0.00009508	=	0.00009508	90	0.00551832	=	0.00551832
41	0.00010049	=	0.00010049	91	0.00612218	=	0.00612218
42	0.00010855	=	0.00010855	92	0.00674311	=	0.00674311
43	0.00011649	=	0.00011649	93	0.00744827	=	0.00744827
44	0.00012564	=	0.00012564	94	0.00808670	=	0.00808670
45	0.00013694	=	0.00013694	95	0.00870305	=	0.00870305
46	0.00015127	=	0.00015127	96	0.00920635	=	0.00920635
47	0.00016095	=	0.00016095	97	0.00960840	=	0.00960840
48	0.00017195	=	0.00017195	98	0.02957677	=	0.02957677
49	0.00018527	=	0.00018527	99	0.20662834	=	0.20662834

Método Whittaker-Henderson. Tasas Graduadas

Edad	Tasa Bruta	WH Modelo 1	WH Modelo 2	WH Modelo 3
0	0.011180412073	0.009704749108	0.004199298149	0.005005250812
1	0.001427766297	0.001765436945	0.003424785834	0.003828433140
2	0.000644641418	0.000584887217	0.002696814278	0.002754030530
3	0.000351452671	0.000350795461	0.002047898857	0.001851683734
4	0.000430910658	0.000424000208	0.001495402034	0.001148241284
5	0.000272987121	0.000277035818	0.001045367593	0.000637997224
6	0.000390805929	0.000386840691	0.000695546162	0.000298935479
7	0.000305404329	0.000307014132	0.000438728028	0.000100801527
8	0.000293603635	0.000291869600	0.000264475326	0.000015667012
9	0.000197313715	0.000198878622	0.000160617912	0.000021219465
10	0.000309789343	0.000307818307	0.000114779401	0.000102384235
11	0.000334522748	0.000335844190	0.000115071916	0.000248638247
12	0.000472379307	0.000472343179	0.000150540561	0.000455064133
13	0.000630027399	0.000623391536	0.000210710314	0.000718992281
14	0.000688289250	0.000700729544	0.000285658580	0.001038227216
15	0.001348356400	0.001334508955	0.000367381590	0.001408374066
16	0.001874595992	0.001869045132	0.000449125511	0.001815990117
17	0.002301852910	0.002310402762	0.000526393035	0.002246230238
18	0.002812988366	0.002847535713	0.000596884957	0.002685570499
19	0.003575730202	0.003442400001	0.000659120108	0.003121726589
20	0.003244233027	0.003351657214	0.000712531341	0.003545080866
21	0.003826586076	0.003806195298	0.000758047595	0.003954782129
22	0.004368995348	0.004378635594	0.000797051679	0.004344483375
23	0.004969204927	0.004885750404	0.000832071536	0.004705691800
24	0.004965729473	0.005043242697	0.000864858435	0.005030320592
25	0.005420499343	0.005283110897	0.000896622110	0.005314383369
26	0.005143714429	0.005371118593	0.000928152846	0.005552881214
27	0.006210751501	0.006147323253	0.000959934173	0.005742452675
28	0.006886174093	0.006604816711	0.000993230073	0.005873484537
29	0.005999193386	0.006177908039	0.001028650553	0.005943755142
30	0.005988881201	0.005891887737	0.001066146866	0.005965466463
31	0.005433809040	0.005597316107	0.001106913370	0.005951613238
32	0.005787423484	0.005819461719	0.001153313616	0.005915542038
33	0.006460572395	0.006081212063	0.001207164085	0.005864292726
34	0.005334355015	0.005707648087	0.001270684544	0.005803229495
35	0.006237726695	0.005956303123	0.001345350325	0.005744894044
36	0.005637301739	0.005722917716	0.001430696903	0.005696045954
37	0.005538931687	0.005455776859	0.001527559611	0.005669648908
38	0.005094638820	0.005128999620	0.001636709508	0.005677999260
39	0.004960081536	0.005185704681	0.001757152955	0.005731905584
40	0.006075104662	0.005870128858	0.001891772409	0.005835898287
41	0.006348051108	0.006094217101	0.002041347765	0.005986257188
42	0.005514157973	0.005835297813	0.002204196555	0.006182030515
43	0.006469200098	0.006053358581	0.002378779699	0.006425524921
44	0.005638092103	0.006153867760	0.002565600842	0.006712538213
45	0.007688847082	0.007111952060	0.002764011433	0.007039264287
46	0.007139933603	0.007692385611	0.002973688928	0.007392413141
47	0.009347894477	0.008480398041	0.003196251940	0.007764471256
48	0.008123005512	0.008371969060	0.003437378750	0.008145909818
49	0.008258841819	0.008308696669	0.003696763363	0.008540007140
50	0.008210682622	0.008603441363	0.003974093432	0.008949871082
51	0.010133605072	0.009445833655	0.004270579225	0.009376508103
52	0.009800324931	0.009939217008	0.004582084478	0.009814775239
53	0.010808669572	0.010373648112	0.004908062089	0.010264391855
54	0.009297405634	0.010771414284	0.005251626812	0.010724978643
55	0.015688032273	0.011858328378	0.005615396401	0.011199653564
56	0.009933387870	0.011538987853	0.006001152322	0.011682216524
57	0.012071836346	0.012006624770	0.006419041812	0.012195585114
58	0.013137878578	0.012715699032	0.006876031669	0.012751802834
59	0.014149114873	0.013210413302	0.007383337448	0.013362162669
60	0.012084073077	0.013493594252	0.007954132248	0.014039994359
61	0.016038492382	0.014580403765	0.008601449752	0.014803063996
62	0.015820456218	0.015473913921	0.009328341289	0.015656736132
63	0.016294606485	0.016292684893	0.010141891403	0.016611987121
64	0.015227199484	0.017448252175	0.011051349523	0.017680615851
65	0.022965161693	0.019353575126	0.012070050907	0.018873020777
66	0.020129098013	0.020638755589	0.013197357915	0.020188549076
67	0.021409305462	0.021900949911	0.014441123549	0.021645605722
68	0.021972354033	0.023445204014	0.015808825978	0.023262360560
69	0.029646522235	0.025309951147	0.017317170346	0.025055986237
70	0.024399226591	0.026898094540	0.018986492485	0.027039134265
71	0.030029325513	0.028981825921	0.020849928076	0.029240577964
72	0.030846234431	0.031248138488	0.022941761802	0.031678699140
73	0.035652057365	0.033672469287	0.025280735615	0.034374355813
74	0.036200224691	0.036121773622	0.027885052225	0.037345841711
75	0.038056278666	0.038862510708	0.030787110822	0.040614953030
76	0.042733908427	0.042177872269	0.034005560465	0.044200190819
77	0.041757285776	0.046186652435	0.037550039911	0.048112597004
78	0.052017167382	0.051101497947	0.041441554985	0.052359242384
79	0.060554930634	0.056434011795	0.045657420535	0.056931311730
80	0.059121917089	0.061793001927	0.050202853324	0.061819309927
81	0.072987390883	0.067128287734	0.055081174877	0.067020810090
82	0.078104660245	0.072146669336	0.060280765233	0.072527823075
83	0.082606166376	0.076861840287	0.065847521663	0.078341344842
84	0.079548918013	0.081557609217	0.071834154221	0.084470198751
85	0.081520073552	0.086737109835	0.078302481759	0.090928580418
86	0.081395348837	0.092827217780	0.085299872200	0.097724861607
87	0.089454545455	0.100063009819	0.092856246751	0.104856301790
88	0.123938879457	0.108280126690	0.100944604468	0.112301830755
89	0.133542319749	0.117017258373	0.109397880942	0.120025026623
90	0.115302491103	0.126008673101	0.118122442981	0.127996979150
91	0.167938931298	0.135159653320	0.127010374995	0.136196648311
92	0.158595641646	0.144260065200	0.135918709491	0.144596542453
93	0.179791976226	0.153227426358	0.144872616284	0.153178265438
94	0.184257602862	0.162042075973	0.153930886177	0.161927648735
95	0.147302904564	0.170765912098	0.163297603639	0.170837056682
96	0.165865384615	0.179515811686	0.173147962156	0.179903412345
97	0.160112359551	0.188343185936	0.183663275762	0.189119537239
98	0.168421052632	0.197270888560	0.194879440822	0.198476150718
99	0.406639004149	0.206269053934	0.206628340025	0.207960237953

BIBLIOGRAFÍA

[i] López Cachero, M.; López de La Manzanara J. (1996). Estadística para Actuarios, Mapfre, Madrid, España.
[ii] Weinert, L., Howart (2006). Efficient computation for Whittaker–Henderson smoothing. (USA).

[2.1]- Seal, H.L., 1981. Graduation by piecewise cubic polynomials: a historical review. Deutsche Ges. Versicherungsmath. 15, 89–114.

[2.2]- Henderson, R., 1938. Mathematical Theory of Graduation. Actuarial Society of America, New York.

[2.3]- Miller, M.D., 1946. Elements of Graduation. Actuarial Society of America, NewYork.

[2.4]- London, D., 1985. Graduation: The Revision of Estimates. ACTEX, Abington.

[iii] Bohlmann, G. Ein Ausgleichungs Problem. In Nachrichten von der Königl Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse; Horstmann, L., Ed.; Commissionsverlag der Dieterich'schen Universitätsbuchhandlung: Göttingen, Germany, 1899; pp. 260–271.

[iv] Whittaker, E.T. On a new method of graduation. Proc. Edinb. Math. Soc. 1923, 41, 63–75

[v] Henderson, R. A new method of graduation. Trans. Actuar. Soc. Am. 1924, 25, 29–53.

Henderson, R. Further remarks on graduation. Trans. Actuar. Soc. Am. 1925, 26, 52–74.

[vi] ANDREWS, G. y NESBITT, C.J. (1965). Periodograms of graduation operators. Transactions of the Society of Actuaries. (Núm.17, págs.166-177).

[vii] Haberman, S. and Renshaw, A. (1996) Generalized linear model and actuarial science. The Estatistician, 45 (4): 659-675.

[viii] KIMELDORF, G.S. y JONES, D.A. (1.967). Bayesian graduation. Transactions of the Society of Actuaries (Vol. XIX, págs.66-112).

[ix] WHITTAKER, E.T. (1.923). On a new method of graduation. Proceedings of the Edinburg Mathematical Society. Vol. 41, págs. 63-75.

[x] LONDON, R. (1.984). Graduation: the revision of estimates, Itasca, Illinois: Society of Actuaries. London, Dick. 1983. Graduation: The Revision of Estimates. Abington, CT: ACTEX Publications.

[xi] Armando Antonio Caballero Wngaray CABALLERO, A. A. (2004). Desarrollo de una tabla de mortalidad mediante el método Whittaker-Henderson. Universidad de las Américas Puebla. México.

[xii] WEINERT, H. L. (1.923). Efficient computation for Whittaker-Henderson smoothing. ScienceDirect. Computational Statistics & Data Analysis 2006

[xiii] Spoerl, C.A., 1937. The Whittaker–Henderson graduation formula A. Trans. Actuarial Soc. Amer. 38, 403–462.

[xiv] Spoerl, C.A., 1937. The Whittaker–Henderson graduation formula A. Trans. Actuarial Soc. Amer. 38, 403–462.

[xv] HOWARD, R. C. W. (2007). Graduation software and a description of Whittaker-Henderson graduation and variants available at: http://www.howardfamily.ca/~bob/graduation.