

Conferencia Interamericana de Seguridad Social



**Centro Interamericano de
Estudios de Seguridad Social**

Este documento forma parte de la producción editorial de la Conferencia Interamericana de Seguridad Social (CISS)

Se permite su reproducción total o parcial, en copia digital o impresa; siempre y cuando se cite la fuente y se reconozca la autoría.

**Desplegado de Tablas
de Mortalidad a
Partir de Grupos
Quinquenales
de Edad**

**Maria Cedillo Sánchez
Guillermo Daniel Cruz Reyes**

Serie Estudios 9

**CONFERENCIA
INTERAMERICANA
DE SEGURIDAD SOCIAL
CISS**



**SECRETARIA GENERAL
COMISION AMERICANA DE ACTUARIA Y FINANCIAMIENTO**

**CONFERENCIA
INTERAMERICANA
DE SEGURIDAD SOCIAL**

Lic. Genaro Borrego Estrada
Presidente

Lic. Roberto Ríos Ferrer
Secretario General

Dr. Alvaro Carranza
Urriolagoitia
Director del CIESS

**Coordinación Técnica de la
Secretaría General**

Lic. María del Carmen Alvarez
Lic. Pedro Cervantes Campos
Act. Ana Luz Delgado Izazola
Lic. Antonio Espitia Ledesma
Ing. Francisco Martínez Narváez
Lic. Mario A. Rodríguez Malpica E.
Dr. Antonio Ruezga Barba

Comisión Editorial

Lic. Sergio Candelas Villalba
Coordinador
Lic. Gabriel del Río Remus

Este libro fue publicado por la Secretaría General de la Conferencia Interamericana de Seguridad Social. Su contenido es responsabilidad exclusiva de su (s) autor (es) y no refleja necesariamente la posición de la CISS. Está permitida la reproducción total o parcial de su contenido sólo con mencionar la fuente.

Derechos reservados conforme la ley

ISBN 968-7346-18-3

**DESPLEGADO DE TABLAS
DE MORTALIDAD A PARTIR DE
GRUPOS QUINQUENALES DE EDAD**

APOYO TECNICO
Lucía Medrano Pérez

SEMBLANZA BIOGRAFICA DE LOS AUTORES

María Cedillo Sánchez.

Nació el 29 de diciembre de 1969 en el Estado de México. Estudió la carrera de actuaría en la Escuela Nacional de Estudios Profesionales Acatlán, dependiente de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Asistió en calidad de estudiante al diplomado en "Valuaciones Actuariales: Bases y procedimientos", que se impartió en el CIESS en el año de 1993. De igual forma, también asistió al seminario: "Proyecciones Demográficas y Financieras de la Tercera Edad" que se llevó a cabo en el mismo lugar y año.

Por otra parte, ha tenido oportunidad de participar en calidad de expositora, en aspectos relacionados con el tema de despliegue de tablas de mortalidad, en la XXI reunión de la Comisión Americana de Actuaría y Financiamiento (CAAF), celebrada en diciembre de 1993.

Actualmente se encuentra laborando en el Instituto Mexicano del Seguro Social, en la Unidad de Servicios Actuariales, se desempeña principalmente en el área de Investigación, su participación más reciente, además de la elaboración del presente documento, ha sido como colaboradora en el desarrollo de un proyecto para construir las bases biométricas por sexo para el ramo de Invalidez, Vejez, Cesantía y Muerte.

Guillermo Daniel Cruz Reyes.

Estudio la carrera de actuaría en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Asistió en calidad de estudiante al diplomado en "Valuaciones Actuariales: Bases y procedimientos", que se impartió en el CIESS en el año de 1993. De igual forma, también asistió al Seminario: "Proyecciones Demográficas y Financieras de la Tercera Edad" que se llevó a cabo el mismo lugar y año.

Por otra parte, ha tenido oportunidad de participar como expositor, en aspectos relacionados con el tema de despliegue de tablas de mortalidad, en la XXI reunión de la Comisión Americana de Actuaría Financiamiento (CAAF), celebrada en diciembre de 1993.

Actualmente se encuentra laborando en el Instituto Mexicano del Seguro Social, en la Unidad de Servicios Actuariales, se desempeña principalmente en el área de investigación, su participación más reciente, además de la elaboración del presente documento, ha sido como colaborador en el desarrollo de un proyecto para construir las bases biométricas por sexo para el ramo de Invalidez, Vejez, Cesantía y Muerte.

AGRADECIMIENTO

Deseamos expresar un sincero agradecimiento al Act. Carlos J. Soto Pérez por el apoyo brindado en el desarrollo de la presente investigación. De igual forma, agradecemos a los actuarios Alejandro Hazas Sánchez, Francisco Bayo y Juan Arturo Martínez Mancera la orientación técnica proporcionada.

Asimismo, agradecemos a la Act. Silvia Malpica Flores y todas aquellas personas que de alguna manera tuvieron la gentileza de brindarnos su ayuda para llevar a buen término la realización del presente trabajo.

**DESPLEGADO DE TABLAS DE
MORTALIDAD A PARTIR DE GRUPOS
QUINQUENALES DE EDAD**

Maria Cedillo Sánchez
Guillermo Daniel Cruz Reyes

Serie Estudios 9

CONFERENCIA INTERAMERICANA DE SEGURIDAD SOCIAL

Secretaría General

COMISION AMERICANA DE ACTUARIA Y FINANCIAMIENTO

INDICE

TEMA	PAGINA
Presentación	iii
Introducción	Vii

CAPITULO UNO

ELEMENTOS INTRODUCTORIOS.

1.1 .- Reseña histórica	3
1.2 .- Estructura de las tablas de mortalidad	6
1.3 .- El fenómeno de la mortalidad	11
1.4 .- Transformación de escala	13

CAPITULO DOS

DESPLIEGUE DE TABLAS QUINQUENALES

2.1 .- Panorámica del procedimiento	17
2.1.1.- Análisis de la tabla quinquena de mortalidad quinquenal	17
2.1.2 .- Interpolación y extrapolación	18
2.1.3 .- Obtención de la tabla de mortalidad por edad	21
2.2 .- Ajuste (o graduación) de curvas	
2.2.1 .- Método gráfico	23
2.1.2 .- Métodos mecánicos	23
Ajuste de Karup	24
Promedios móviles	26
2.2.3 .- Métodos analíticos	28
2.2.4 .- Pruebas de suavidad	29
2.2.5 .- Pruebas de proximidad	30

INDICE

TEMA	PAGINA
2.3 .- Métodos de la interpolación	32
2.3.1 .- Método de Karup-King	33
2.3.2 .- Métodos de Beers, Greville y Sprague	39
2.4 .- Métodos de interpolación y ajuste (Fórmulas osculatorias modificadas) . .	41
2.5 .- Extrapolación	46
2.5.1 .- Hipótesis de Gompertz	46
2.5.2 .- Hipótesis de Gompertz-Makeham . . .	50
2.5.3 .- Hipótesis Gompertz Modificada . . .	53

CAPITULO TRES

APLICACION PRACTICA

3.1 .- Análisis de los datos	59
3.2 .- Intervalo superior	70
3.3 .- Intervalo central	73
3.4 .- Intervalo Inferior	82
3.5 .- Unión de intervalos	86
3.6 .- Tabla de mortalidad por edad	96
3.7 .- Procedimiento alternativo	102
3.8 .- Tabla de mortalidad total	108
Conclusiones	118

INDICE

TEMA	PAGINA
Anexo A :	
A.1.- Definiciones básicas	123
A.2.- Relaciones entre funciones biométricas standard	127
Anexo B :	
B.1.- Fórmula de Everett	131
Anexo C :	
C.1.- Tabla quinquenal de mortalidad, sexo femenino (1990-95)	135
C.2.- Coeficientes de Karup-King para interpolar en base a cuatro puntos	136
C.3.- Coeficientes de Karup-King para desagregar totales quinquenales	137
C.4.- Multiplicadores de Beers	138
C.5.- Multiplicadores de Sprague	139
C.6.- Multiplicadores de Greville	140
Bibliografía	143
Observaciones	149

PRESENTACION

Por instrucciones del Presidente de la Conferencia Interamericana de Seguridad Social, (CISS) licenciado Genaro Borrego Estrada, la Secretaría General, consecuente con los estatutos que rigen su organización, desarrollo un programa editorial, cuyo propósito responde a las demandas de las instituciones de Seguridad Social de América por conocer los avances que se registran en áreas que influyen su trabajo cotidiano y dejar así constancia de los mismos en documentos útiles.

La Secretaría General de la CISS, nuevamente a iniciativa de uno de sus órganos técnicos, la Comisión Americana de Actuaría y Financiamiento, se complace en editar el presente libro que sin duda será un gran apoyo para los interesados en la Seguridad Social Continental.

Su contenido responde a solicitudes expresadas desde hace tiempo por diversas instituciones miembros de la Conferencia para contar con herramientas técnicas que apoyen la función actuarial, especialmente en lo que se refiere a la construcción de tablas de mortalidad, y en particular a las tablas de mortalidad de los pensionados que se requieren desplegadas por edades individuales.

Este documento será además de gran ayuda para los estudiosos de la ciencia demográfica, ya que

mortalidad.

Se presentan en tres capítulos los elementos introductorios a la construcción y manejo de las tablas de mortalidad, se profundiza en el despliegado de las tablas mencionadas y finalmente se presentan aplicaciones prácticas. Al final se incluyen tres anexos donde se presentan las definiciones básicas, las funciones biométricas standard, la fórmula de Everett y algunas tablas que contienen los coeficientes y multiplicadores utilizados en el desarrollo de este trabajo.

La Secretaría General de la General de la CISS agradece la valiosa participación de los autores, María Cedillo Sánchez y Guillermo Daniel Cruz Reyes, del actuario Carlos J. Soto Pérez, Presidente de la Comisión Americana de Actuaría y Financiamiento, y a los señores actuarios que apoyaron a los autores con su asesoría técnica y amplia experiencia para contribuir a la exitosa culminación del presente estudio.

LIC. ROBERTO RIOS FERRER
Secretario General de la Conferencia
Interamericana de Seguridad Social

INTRODUCCION

Desde la antigüedad se han comenzado a desarrollar ciertos elementos que conjugados permiten la construcción de lo que hoy conocemos como tablas de mortalidad. Elementos que van desde los primeros intentos de algunos pueblos por recolectar datos estadísticos; como los griegos, que registraban a los muertos en guerra con el propósito de favorecer a las viudas y huérfanos de los fallecidos en combate; pasando por los primeros cálculos relativos a las probabilidades de vida en 1671¹; hasta la actual aplicación de métodos estadísticos sofisticados.

Una tabla de mortalidad (instrumento para medir las probabilidades de vida y de muerte) tiene como base para su elaboración la construcción de la probabilidad de muerte que se asocia a cada edad en el total del rango de vida. Estas probabilidades representan un fenómeno, la mortalidad, cuyas características son por demás singulares, a tal grado que aún no se ha podido construir una función que por sí misma sea capaz de describir su tendencia en el total del rango de vida, haciendo necesario recurrir a una división por intervalos de edad y a un tratamiento específico para cada uno.

Frecuentemente las tablas de mortalidad se encuentran expresadas en forma abreviada, ya sea en intervalos de edad de cinco (quinquenales) o de diez (decenales) años, sin embargo no siempre es conveniente utilizarlas así, por ejemplo, en el cálculo de las pensiones, las tablas de mortalidad de los pensionados se requieren por edades individuales. De esta

1 Antonio Lasheras Sanz, "Matemáticas del Seguro", pág. 43.

forma, es indispensable transformar las tablas abreviadas en tablas por edad.

En las tablas quinquenales, como en toda tabla abreviada, la información se encuentra sintetizada y por lo tanto se hace patente la necesidad de recurrir a un procedimiento cuya aplicación, además de dar una descripción explícita de las probabilidades de muerte, justifique el tiempo y conocimientos técnicos que requiere en relación con el uso que se pretende dar a los resultados; tal proceso debe considerar la caída acelerada de la mortalidad en las primeras edades, la delicada tendencia de crecimiento en las edades jóvenes y medianas, así como el acelerado incremento en las edades maduras y una hipótesis de extrapolación para las edades avanzadas.

Las alternativas de solución son diversas y de variada complejidad, en especial dependen de la experiencia y conocimientos técnicos de quien realiza el trabajo. En el presente escrito se sugiere y se da una explicación sobre una alternativa que comprende, una distribución para las edades 0-5, semejante a la registrada en una tabla de mortalidad por edades previamente elaborada; una interpolación con los multiplicadores de Beers para el intervalo 5-79, un suavizamiento de las edades 60-80 ajustando una curva *Gompertz* y una extrapolación basada en la hipótesis *Gompertz Modificada*, de edad 80 a la extinción de la población. Sin embargo, sólo es una posible solución; alguna otra se puede elaborar conjugando, además de un tratamiento especial en las primeras edades, métodos convenientes de interpolación, extrapolación y graduación, entre los primeros encontramos el de Karup-King, los multiplicadores de Beers, Greville y Sprague, las fórmulas osculatorias modificadas, etc.; mientras que para extrapolar las más favorecidas son las hipótesis de *Gompertz*, *Gompertz-Makeham* y *Gompertz Modificada*.

NOTACION

- t : Número de elementos que contiene cada conjunto en que se subdivide una serie dada con n elementos.
 $t \in \mathbb{Z}^+$ y $t \leq n$
- S_i : Suma del logaritmo natural de los elementos del subconjunto i .
- μ_x : Tasa instantánea de mortalidad.
- r : Tasa de crecimiento de la resistencia del hombre a la muerte.
- j_x : Tasa de crecimiento de $q(x)$ respecto a $q(x-1)$.
- k : Porcentaje de decrecimiento que se aplica a la mortalidad después de edad 90.
 $0 < k \leq 1$
- r_m : Tasa promedio anual de crecimiento de la mortalidad en un promedio de m años.
- w : Última edad en la tabla de mortalidad.

NOTACION

- U_x : Valor conocido correspondiente a la edad x .
- U'_x : Valor ajustado correspondiente a la edad x .
- U_{x+s} : Valor interpolado para la edad $x+s$.
- s : Edad intermedia en un intervalo de edades $(x, x+a)$, tal que $a \in \mathbb{Z}^+$.
- β_1 : Suma de los valores conocidos U_{x-1} y U_{x+1} .
- $\Delta^n U_x$: n -ésima diferencia ordinaria de U_x .
- $\delta^n U_x$: n -ésima diferencia central de U_x .
- $m_{1,s}$: Coeficiente de Karup-King para obtener el valor interpolado de la edad $x+s$.
- $N_{x,s}$: Coeficiente de la tabla de multiplicadores para obtener el valor interpolado de la edad $x+s$.
- $Z(i)$: Valor conocido $l(x_i)$ en una serie de n observaciones de $l(x)$.
 $i = 1, 2, 3, \dots, n$

CAPITULO I

**ELEMENTOS
INTRODUCTORIOS**

1.1 RESEÑA HISTORICA.

A través del tiempo las necesidades de la población han impulsado el deseo de desarrollar tablas para medir las probabilidades de muerte, motivando, en consecuencia, a investigadores de distintas especialidades y nacionalidades a realizar estudios al respecto. En particular, el actuario ha desempeñado un papel muy importante, proponiendo, desarrollando e investigando nuevos métodos y modelos representativos del fenómeno de la mortalidad.

Se han registrado diversos intentos por construir tablas de mediciones de probabilidad, desarrollándose, a través del tiempo, los elementos técnicos que se conjugan para conformar la estructura y elementos de la tabla actual.

Se desconoce, en gran medida, si los pueblos de la antigüedad consideraban registros sobre fallecimientos y en caso de que así fuese como los llevaban. Los griegos, por su parte anotaban a los muertos en guerra con el propósito de ayudar a las viudas y huérfanos de los muertos en combate. Los asirios, hebreos, fenicios y egipcios, en cambio, dejaron como incógnita este hecho debido a la destrucción de las bibliotecas en Efeso y Alejandría. De los romanos se sabe que hacía el año 578 a.C. se comenzaron a registrar, por primera vez, los nacimientos y las defunciones con el propósito de recaudar impuestos.

El primer intento por calcular probabilidades de vida humana se llevó a cabo en 1671 por el holandés Witt y Van Hudden. En la misma época el Dr. Neumann realizó una tabla con cierto grado de contenido técnico, en realidad se trata de la primera tabla a la que se atribuye algún valor. Más tarde, el Dr. Halley publicó una tabla que por su rigor y tamaño de muestra bien puede llamarse Tabla de Mortalidad, sin embargo tenía un procedimiento de construcción erróneo. Esta tabla fué mejorada en diversas ocasiones, incluyendo la de Simpson en 1742, mejorada a su vez por Dadson, quien se basó en el registro de mortalidad de Londres de 1728 a 1750.

En 1834 el Act. Mr. Artur Morgan construye por primera vez una tabla basada en experiencia aseguradora, abarcando un período de experiencia que comprende los años 1762-1828, a su vez la tabla fué perfeccionada en 1843 mediante las tablas tituladas de las "Diecisiete Compañías Inglesas (Combined experience)", elaboradas por los mejores actuarios de la época con una muestra de 84,000 pólizas y un período de observación que comprende los años 1762-1837.

En 1869 el Instituto de Actuarios de Londres y la Facultad de Actuarios de Escocia publicaron, con base en la experiencia de diez compañías inglesas y diez escocesas, en un período de veinte años, las tablas Healty Males, Healty Females, Diseased Males and Females y otra sobre riesgos especiales; estas tablas se consideran dentro de las mejores e incluso han sido utilizadas por un largo período posterior a su elaboración.

La primera tabla americana "American Experience Table", fué construída por el Actuario Shephard Homan en 1869, con base en los dieciséis primeros años de experiencia de una Compañía fundada en 1843, llegando a ser una de las mejores de su tiempo.

Las tablas tituladas "The British Offices Life Tables, 1893", construídas por el Instituto de Actuarios de Londres en 1903, se realizaron para ambos sexos y abarcaron los datos de sesenta Compañías de seguros de vida, entre ellos las rentas vitalicias de cuarenta Compañías.

Por su parte, el Gobierno de los Estados Unidos publicó en 1916 su primera tabla de mortalidad, elaborada por el Profesor J. W. Glover, quien además realizó varias tablas en 1921, separando la mortalidad en ambos sexos, con distinción a su vez de color de razas, personas nativas y extranjeras y según las distintas ciudades. La Sociedad Actuarial Americana (Canadá y Estados Unidos) construyó una tabla comparativa basada en la experiencia de 30 Compañías de América del Norte, publicadas en 1918¹.

En México, las tablas más conocidas y muy frecuentemente utilizadas son la "Experiencia Mexicana" de 1962-67 y la de 1982-89 o las tablas CSO del 58 y 80. Sin embargo, la necesidad de disponer, en el medio asegurador, de una tabla reciente elaborada con experiencia propia ha persistido durante largo tiempo, propiciando cierto interés por desarrollar las estadísticas necesarias para su construcción. Uno de últimos estudios se refiere a la construcción de las tablas selectas de mortalidad por edad, sexo, y antigüedad en vidas aseguradas, elaboradas en el Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM) en el año de 1991, bajo la coordinación del Act. Jorge Redón E.. Con la experiencia de los años 1987-1990 de cinco compañías aseguradoras : Grupo Nacional Provincial; Seguros América, S.A.; Seguros de México, S.A.; Seguros La Comercial, S.A. y Seguros Monterrey, S.A.² Las cuales aún presentan la limitante de considerar que la población se extingue por completo en la edad 100.

1 Antonio Lasheras Sanz, "Matemáticas del Seguro", págs. 43-49

2 Act. Jorge Rendón E., " Experiencia Mexicana 1987-90. ITAM.

1.2 ESTRUCTURA DE LAS TABLAS DE MORTALIDAD.

Una Tabla de Mortalidad puede definirse como el instrumento destinado a medir las probabilidades de vida y de muerte. Más explícitamente, muestra para una población hipotética su historia subsecuente de vida y de muerte, basándose en un número supuesto de recién nacidos, generalmente una potencia de 10, que representa la población a edad cero y recibe el nombre de raíz.

Cuando los elementos de la tabla expresan valores para cada una de las edades del rango de vida, se dice que se tiene una tabla de mortalidad por edad; pero si los datos aparecen compactados y representan grupos de edad, quinquenales o decenales, lo que se tiene es una Tabla Abreviada.

La información disponible en estas tablas puede determinarse a través de las Funciones Biométricas Standard que la integran.

Funciones Biométricas Standard¹

$l(x)$: Número de personas que sobreviven a la edad exacta x , o el número de personas que alcanzan la edad exacta x durante cada año en una población estacionaria.

$d(x)$: Número de personas que mueren entre las edades exactas x y $x+1$, o el número de muertos con última edad cumplida x para cada año en una población estacionaria.

$$d(x) = l(x) - l(x+1)$$

¹ José González Galé, "Elementos de Cálculo Actuarial", págs. 3-21; Fellicite C. Bell, "Life Tables for the United States Social Security Area 1900-2080", Pág. 9; Jordan Chester Wallace, Jr., "Life Contingences", págs. 170-173.

La suma a partir de x , del número de personas que se mueren en cada una de las subsiguientes edades, hasta la extinción de la población, representa el total de sobrevivientes a la edad exacta x :

$$l(x) = \sum_{t=0}^{w-1-x} d(x+t)$$

$L(x)$: Número de años vividos por la población entre las edades exactas x y $x+1$, o el número de personas que en promedio han estado con vida entre las edades exactas x y $x+1$.

$$L(x) = \int_0^1 l(x+t) dt$$

Supóngase que la mortalidad asume una distribución uniforme, entonces :

$$L(x) = \int_0^1 l(x+t) dt = \int_0^1 (l(x) - td(x)) dt$$

resolviendo la integral

$$L(x) = l(x) - 1/2d(x)$$

sustituyendo $d(x)$

$$L(x) = l(x) - \frac{1}{2} (l(x) - l(x+1))$$

$$L(x) = \frac{1}{2} (l(x) + l(x+1))$$

esto es, $L(x)$ es el promedio del número de sobrevivientes que cumplen exactamente las edades x y $x+1$, bajo el supuesto de distribución uniforme.

Si la distribución de la mortalidad no se considera uniforme, el valor de $L(x)$ será :

$$L(x) = l(x) - f_x d(x)$$

con f_x no necesariamente igual a $1/2$.

f_x : Factor de separación que representa el número promedio de años no vividos entre las edades exactas x y $x+1$ por aquellos que murieron entre las edades exactas x y $x+1$. Para períodos de un año este factor suele aproximarse a $1/2$.

$T(x)$: Número de años vividos por la población después de la edad exacta x .

$$T(x) = \int_0^{\infty} l(x+t) dt$$

$$T(x) = \int_0^1 l(x+t) dt + \int_1^2 l(x+t) dt + \dots$$

por lo tanto,

$$T(x) = \sum_{t=0}^{w-x-1} L(x+t)$$

$\overset{\circ}{e}(x)$: Recibe el nombre de vida media completa y representa el número promedio de años vida que se espera viva una persona que llega a la edad exacta x .

$$\overset{\circ}{e}(x) = \frac{T(x)}{l(x)}$$

sustituyendo $T(x)$:

$$\overset{\circ}{e}(x) = \frac{\int_0^{\infty} l(x+t) dt}{l(x)} = \int_0^1 p(x,t) dt$$

Específicamente, determina el número de años que le correspondería vivir a una persona de edad x , si todos los años que debe vivir la población que llega a edad exacta x ($l(x)$), a la cual pertenece tal persona, se distribuyen por igual entre cada integrante de $l(x)$.

Si en vez de admitir que las muertes ocurren a mitad del año se asume que ocurren al inicio, se puede definir lo que se conoce como vida media abreviada ($e(x)$) :

$$e(x) = \overset{\circ}{e}(x) - 1/2$$

Esto implica suponer que cada componente del grupo ha vivido medio año menos.

$m(x)$: Tasa central de mortalidad para el subconjunto de la población estacionaria que está entre las edades exactas x y $x+1$.

$$m(x) = \frac{d(x)}{L(x)}$$

poniendo $d(x)$ y $L(x)$ en función de $l(x)$:

$$m(x) = \frac{l(x) - l(x+1)}{1/2[l(x) + l(x+1)]}$$

simplificando :

$$m(x) = \frac{q(x)}{1 - 1/2q(x)}$$

$q(x)$: Probabilidad de que una persona de edad exacta x muera antes de alcanzar la edad exacta $x+1$.

$$q(x) = \frac{d(x)}{l(x)}$$

en términos de la tasa central de mortalidad :

$$q(x) = \frac{m(x)}{1 - 1/2m(x)}$$

$p(x)$: Probabilidad de que una persona de edad exacta x sobreviva a la edad exacta $x+1$.

$$p(x) = 1 - q(x)$$

en términos de la tasa central de mortalidad :

$$p(x) = \frac{2 - m(x)}{1 + m(x)}$$

Para calcular $q(x)$ o $p(x)$ en función de $m(x)$ o a la inversa, $m(x)$ en función de $q(x)$ o $p(x)$, se debe contar con datos iniciales lo más exactos posible, evitando así las desviaciones que se producirían al utilizar series de datos no graduadas.

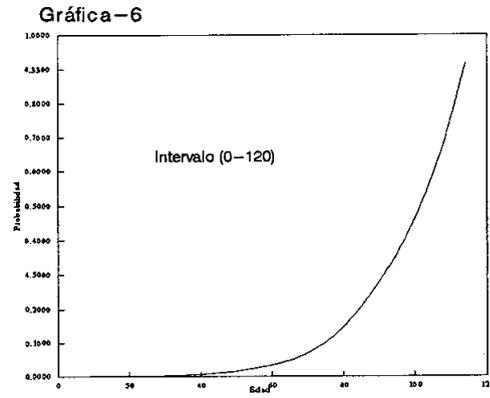
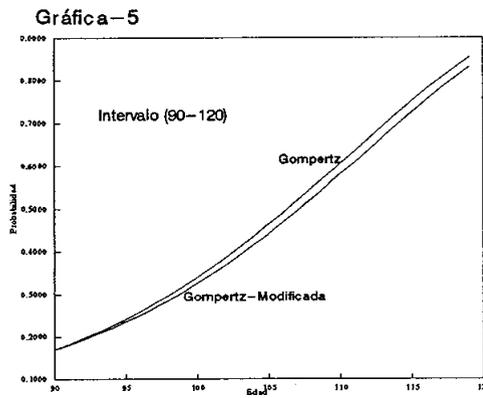
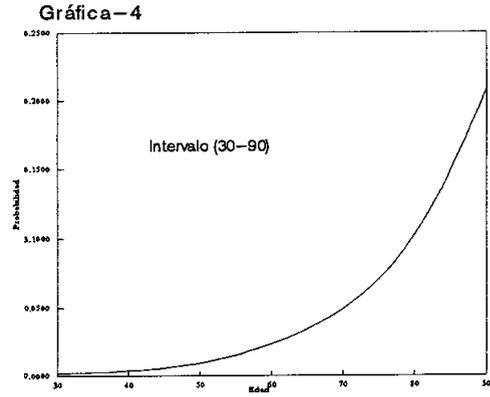
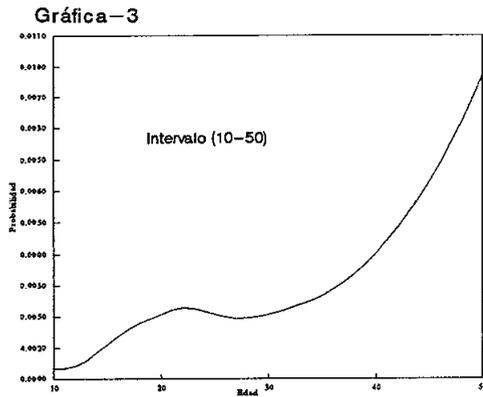
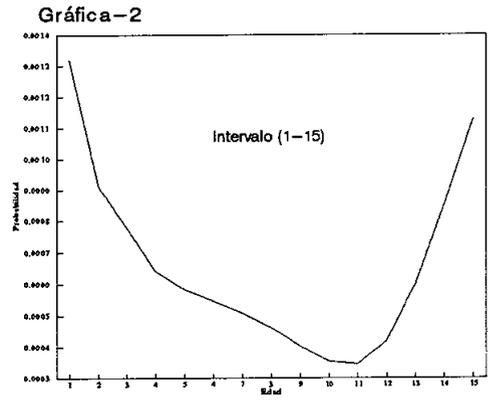
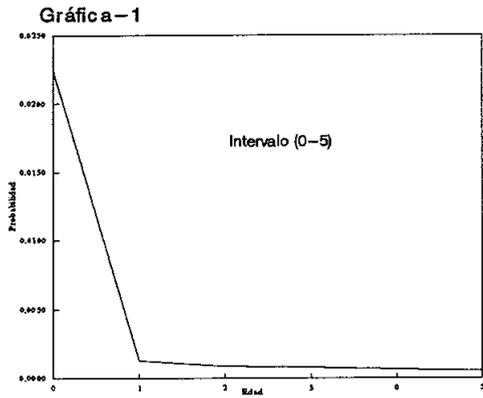
1.3 EL FENOMENO DE LA MORTALIDAD.

El fenómeno de mortalidad ha sido objeto de una gran diversidad de estudios, a través de ellos se ha llegado a observar que la tendencia de las probabilidades de muerte se puede describir como si fuese una letra "j" deformada. En la infancia, la probabilidad de muerte del intervalo 0-1 registra el decrecimiento más grande del total del rango de vida. De la edad 1 y hasta aproximadamente edad 11 continúa decreciendo rápidamente, aunque en menor proporción que el intervalo anterior (Gráf-2), después se incrementa delicadamente hasta un máximo entre las edades 20 y 35 (Gráf-3). Posteriormente, se incrementa sin parar hasta las edades 80 ó 90¹ (Gráf-4). Para el resto de las edades del rango de vida (edades avanzadas) existen problemas para determinar una tendencia específica, una de las hipótesis más difundidas sugiere que la tasa de crecimiento sigue el comportamiento del intervalo anterior (Hipótesis Gompertz). Otra hipótesis, de difusión más reciente, a la que llamaremos *Gompertz Modificada* expresa que después de aproximadamente la edad 90 la mortalidad se incrementa, pero a una tasa progresivamente más pequeña (Gráf-5).

Esta descripción de la tendencia de las probabilidades de muerte en el total del rango de vida es tan singular que desde tiempos históricos se ha intentado obtener una función matemática que la describa, sin ningún éxito. En la actualidad, cuando se desea trabajar con ella se prefiere hacer una división por intervalos de edad, tratar a cada uno en forma independiente y finalmente realizar una total.

1 Morton D. Miller, "Elements of Graduation", pag. 57.

Tendencia de las Probabilidades de Muerte en Diferentes Intervalos de Edad



1.4 TRANSFORMACION DE ESCALA.

Supóngase que se tiene una función $y = U_x$ que asume los valores, 123, 234, 345, 456 y 567 para x igual a 22, 24, 26 28 y 30, respectivamente. Obsérvese que se tiene la misma curva si se transforma el origen de las coordenadas y la escala, es decir, si se representa 22 con $x = 0$, 24 con $x = 1$, 26 con $x = 2$, 28 con $x = 3$ y 30 con $x = 4$.

En capítulos posteriores se encuentran fórmulas, como las de interpolación, que pueden ser aplicadas tanto a intervalos unitarios como a quinquenales, para ello habrá que realizar un cambio de escala, según sea necesario. Por ejemplo, supóngase que se tienen los valores quinquenales que corresponden a las edades 25, 30, 35, y 40, por consiguiente, es posible transformar el origen y la escala representando 25 con $x = 0$, 30 con $x = 1$, 35 con $x = 2$ y 40 con $x = 3$; en esta nueva situación, los valores anuales 26, 27, 28, ... se pueden obtener representando 26 con $x = 0.2$, 27 con $x = 0.4$, ...

Otra aplicación similar se desarrolla cuando se ajusta la función *Gompertz* o *Gompertz-Makeham*. Si se tienen n valores experimentales de $l(x)$ que se corresponden con n edades x_0, x_1, \dots, x_{n-1} , entonces, es posible simplificar el procedimiento haciendo la transformación de escala y origen que resulte más conveniente.

CAPITULO II

**DESPLIEGUE DE TABLAS
QUINQUENALES**

2.1 PANORAMICA DEL PROCEDIMIENTO.

En términos generales, el proceso de despliegue de tablas quinquenales de mortalidad puede englobarse en tres puntos :

- Análisis de la tabla de mortalidad quinquenal.
- Interpolación y extrapolación.
- Obtención de la tabla de mortalidad por edad.

2.1.1 Análisis de la Tabla Quinquenal de Mortalidad.

Antes de comenzar el despliegue y extrapolación es de suma importancia analizar la calidad de los datos proporcionados. Se recomienda revisar los valores asociados a las funciones $l(x)$, $d(x,n)$, $q(x,n)$, $L(x,n)$, $T(x)$, $\dot{e}(x)$ y $m(x,n)$, reconstruyendo la tabla a través de las relaciones aplicables a valores quinquenales :

$$m(x,5) = \frac{d(x,5)}{L(x,5)} ; \quad l(x+5) = l(x) - d(x,5) ;$$

$$q(x,5) = \frac{d(x,5)}{l(x,5)} ; \quad d(x,5) = l(x) - l(x+5) ;$$

$$\dot{e}(x) = \frac{T(x)}{l(x)} ; \quad P(x,x+5) = \frac{L(x+5,5)}{L(x,5)} ;$$

$$T(x) = L(x,5) + L(x+5,5) + \dots$$

$$L(x,5) = 5 \left[l(x) - (0.5)d(x,5) \right]$$

Nota : Estas son sólo algunas de las relaciones posibles de aplicar.

Si la reconstrucción indica que los datos son aceptables y por lo tanto se puede trabajar con ellos, se procede a inspeccionar la regularidad de crecimiento entre un grupo quinquenal y otro consecutivo, para cada una de las funciones de la tabla, principalmente en la que servirá como base para interpolar. Si el grado de suavidad no se encuentra dentro de los parametros que se está dispuesto a aceptar, será necesario aplicar un método de ajuste previo al proceso de interpolación y extrapolación, en caso contrario, se podrá continuar sin necesidad de modificación alguna.

2.1.2 Interpolación y Extrapolación.

Una vez adquirido un panorama general en lo referente a los datos y sus características principales se sugiere buscar como objetivo una buena interpolación y extrapolación sobre $q(x)$, dado que representa las probabilidades de muerte, característica esencial de una Tabla de Mortalidad . Sin olvidar, desde luego, que la función sobre la cual se trabaja está hasta cierto punto bajo control del operador y por lo tanto existe la posibilidad de elegir alguna otra, como $l(x)$, $d(x)$, etc..

Las tendencias particulares del fenómeno de mortalidad inducen la necesidad de obtener los valores por edad de la función $q(x)$ a través de un tratamiento por intervalos. El total del rango

de vida se divide en varias secciones, considerando que posteriormente cada una debe unirse suavemente para integrar la serie final. Los intervalos pueden comprender las edades infantiles 0 a 6, las edades juveniles de 6 a 18, las edades jóvenes adultas de 20 a 35, las edades adultas de 35 a 80 ó 90 y las edades avanzadas de 80 ó 90 a el límite de la tabla¹. Esta subdivisión por intervalos no es única, se puede considerar otra, si se cree conveniente, siempre que el tratamiento del fenómeno en cuestión sea el adecuado.

Ciertas observaciones sugieren que la población sigue una forma cuadrática en diferentes tramos de edades, lo cual no es válido cuando se trata de edades muy jóvenes o de edades muy avanzadas. Si se aplica un polinomio de segundo grado en estas edades se obtendrán resultados totalmente insatisfactorios. Ajustar una parábola en las primeras edades, es decir, asimilar un polinomio de segundo grado para el intervalo 0-4, generará valores bastante alejados de la realidad. Naturalmente el proceso no es el adecuado; una opción puede ser, en este caso, realizar un estudio más consistente, basado en datos reales o, alternativamente, tomar la tendencia implícita en una tabla de mortalidad por edad previamente elaborada, cuyas estadísticas y condiciones permitan homologar el fenómeno. Análogamente, la aplicación de polinomios de este tipo en edades avanzadas es incorrecta, ya que la experiencia ha mostrado la necesidad de emplear un tratamiento especial con curvas de tercer grado o de tipo Gompertz, por mencionar algunas.

Los métodos interpolatorios que involucran polinomios de segundo grado pueden emplearse para tratar las edades centrales, o en su defecto sustituirse por otros, como los de

¹ Morton D. Miller, "Elements of Graduation", pág. 58

Sprague, Greville, Beers, las fórmulas osculatorias modificadas, etc. Todo dependerá de la meta que se pretenda alcanzar.

Las posibilidades de aplicación de métodos de interpolación a menudo se ven influenciadas por la mayor o menor cantidad de grupos de edades involucrados, como es el caso del método de Beers que utiliza polinomios de cuarto grado y por lo tanto requiere cinco grupos de edad, mientras que el método de Karup-king sólo necesita tres. La elección del método influirá, finalmente, en el grado de suavidad proporcionado, entre más datos se tomen como referencia mayor será la suavidad.

En las edades avanzadas, la necesidad de extrapolar involucra la adopción de alguna hipótesis de mortalidad. Dentro de las más utilizadas se encuentran la de Gompertz, Gompertz-Makeham y más recientemente la Gompertz modificada. Tanto la función matemática de Gompertz como la de Gompertz-Makeham¹ pueden ajustarse a través de todo el rango de vida, sin embargo constituyen funciones monótonas y por lo tanto no describen adecuadamente la curva que la mortalidad presenta en las edades jóvenes e incluso medianas, la cual cambia entre descendiente y ascendiente. Por esta razón, tales funciones se aplican en edades posteriores a 40 y para extrapolar, prefiriéndose para las edades menores el empleo de un método de interpolación.

Independientemente de la subdivisión de intervalos adoptada, los métodos de interpolación y extrapolación deberán permitir la descripción adecuada del fenómeno en cada intervalo, de tal forma que al integrar la serie total se tenga la tendencia de

¹ Peter Thullen, "Métodos estadísticos y análisis de costos en la seguridad social", pág. 189.

la mortalidad en todo el rango de vida. La unión entre las curvas de los diferentes tramos de edades podrá realizarse a través de una interpolación que considere los extremos de una y otra curva consecutivas.

2.1.3 Obtención de la Tabla de Mortalidad por Edad.

Determinados los valores de $q(x)$ en el total del rango de vida, el siguiente paso es calcular la tabla mortalidad por edad a través de las respectivas expresiones de cálculo :

$$l(x+1) = l(x) (1-q(x))$$

$$d(x) = l(x) q(x)$$

$$p(x) = 1-q(x)$$

$$L(x) = f_x (l(x) + l(x+1))$$

$$T(x) = \sum_{t=0}^{w-x-1} l(x+t)$$

$$m(x) = \frac{d(x)}{L(x)}$$

$$e(x) = \frac{T(x)}{l(x)}$$

El valor de f_x suele aproximarse a $1/2$, excepto en las primeras edades, acarreado un mínimo de error.

La tabla así obtenida debe conservar las tendencias previamente marcadas en la tabla quinquenal, algunos elementos pueden verificarse a simple vista o con una operación rápida, por ejemplo, la esperanza de vida o el valor de $L(x)$, otros en cambio, requieren una revisión más detallada, pero de cualquier forma la consistencia debe existir invariablemente en cada función.

2.2 AJUSTE (O GRADUACION) DE CURVAS.

Dado un conjunto de n observaciones y_1, y_2, \dots, y_n , correspondientes a valores enteros de la variable x , cuya curva es irregular por la influencia de factores tales como insuficiencia de datos, inexactitud voluntaria o involuntaria de las declaraciones, causas adversas como epidemias, circunstancias excepcionalmente favorables, etc; es común plantearse el problema de determinar la curva regular y continua más sencilla que tenga con la línea quebrada representativa de los valores observados el mayor número de puntos comunes, buscando, dentro de la regularidad de la una y la irregularidad de la otra, que los puntos de la primera, no comunes con los de la segunda, queden a uno y otro lado de ésta y diferenciándose lo menos posible¹. Cuando el problema se resuelve y se sustituye la serie observada por otra que, manteniendo la tendencia del fenómeno, tenga la regularidad deseada entre un período y otro, se dice que se ha efectuado un proceso de ajuste.

Las principales características que una serie ajustada debe reunir son: regularidad entre un período y otro, concordancia entre los valores observados y los ajustados, igualdad de la suma de los valores absolutos de las desviaciones positivas y de las negativas, mínimas desviaciones acumuladas y frecuencia en el cambio de signo de las desviaciones².

Como el proceso de ajuste pretende sustituir una serie irregular por otra que mantenga la tendencia de los valores observados y sea regular, se recomienda ajustar antes de

1 Antonio Lasheras Sanz, "Matemáticas del Seguro", pág. 203.

2 José González Galé, "Elementos de Cálculo Actuarial", pág. 78

aplicar los métodos de interpolación y extrapolación, ya que el manejo de una serie regular permitirá un proceso interpolatorio mas eficiente, no obstante el ajuste se puede emplear en el momento que se crea conveniente, buscando siempre optimizar los resultados.

Los métodos de ajuste pueden clasificarse en tres grupos: gráfico, mecánico y analítico.

2.2.1 Método Gráfico.

El método gráfico fué uno de los primeros métodos de ajuste, su aplicación es rápida y sencilla. Dibujada la gráfica de la serie observada, se traza sobre ella otra curva que, bajo los principios de un buen ajuste, ofrezca mayor regularidad, mantenga la continuidad y reproduzca las características particulares del fenómeno que se trata¹.

El método suele utilizarse para hacer comparaciones entre varios conjuntos de datos pero no en cálculos para resultados definitivos ya que no ofrece la confiabilidad necesaria, toda vez que depende del criterio y la habilidad manual del operador .

2.2.2 Métodos Mecánicos.

Los métodos mecánicos se basan en el empleo de fórmulas deducidas del cálculo de diferencias finitas o de alguna hipótesis simple, buscan, a través de una fórmula algebraica, disminuir las irregularidades de la serie observada². Dentro de

1 Morton D. Miller, "Elements of Graduation", pág. 55.

2 José González Galé, "Elementos de Cálculo Actuarial", pág. 79.

los métodos de este tipo encontramos al de Karup y el de promedios móviles, entre otros.

Ajuste de Karup.

Partiendo de que U_{x-5} , U_x , U_{x+5} y U_{x+10} son cuatro datos conocidos, consideremos que :

- a) Por los puntos U_{x-5} , U_x , U_{x+5} y U_{x+10} pasa una parábola de tercer grado.

$$U_x = U_0 + Ax + Bx^2 + Cx^3 \dots \dots \dots (2.1)$$

- b) Por los puntos U_{x-5} , U_x y U_{x+5} , al igual que por los puntos U_x , U_{x+5} y U_{x+10} pasa una parábola de segundo grado.

$$U_z = U_0 + az + bz^2 \dots \dots \dots (2.2)$$

Supóngase que las dos curvas de segundo grado se juntan con la de tercer grado manteniendo la misma pendiente en el punto de contacto. Entonces :

derivando (2.1) y (2.2) respecto a x y z , respectivamente, y sustituyendo $x=0$ y $x=5$ en cada derivada se tiene :

$$\frac{dU_x}{dx} = A + 2Bx + 3Cx^2$$

$$\left(\frac{dU_x}{dx} \right)_{x=0} = A; \quad \left(\frac{dU_x}{dx} \right)_{x=5} = A + 10B + 75C$$

$$\frac{dU_z}{dz} = a + 2bz; \quad \left(\frac{dU_z}{dz} \right)_{x=0} = a; \quad \left(\frac{dU_z}{dz} \right)_{x=5} = a + 10b$$

de donde,

$$A = a$$

Haciendo $z = 5$ y $z = -5$ en la ecuación de segundo grado, y obteniendo $U_5 - U_{-5}$:

$$U_5 - U_{-5} = 10a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{(U_5 - U_{-5})}{10} = A = \left(\frac{dU_z}{dz} \right)_{z=0} \dots \dots \dots (2.3)$$

de igual forma,

$$\left(\frac{dU_z}{dz} \right)_{z=5} = \frac{(U_{10} - U_0)}{10} = A + 10B + 75C \dots \dots \dots (2.4)$$

sustituyendo $x=5$ en la ecuación de tercer grado :

$$U_5 = U_0 + 5A + 25B + 125C \dots \dots \dots (2.5)$$

resolviendo (2.3), (2.4) y (2.5) para A, B y C se tiene :

$$A = \frac{U_5 - U_{-5}}{10} ; \quad B = \frac{-U_{10} + 4U_5 - 5U_0 + 2U_{-5}}{50}$$

$$C = \frac{U_{10} - 3U_5 + 3U_0 - U_{-5}}{250}$$

sustituyendo A, B y C en la ecuación original de tercer grado :

$$U_x = U_0 + \frac{(U_5 - U_{-5})x}{10} + \frac{(-U_{10} + 4U_5 - 5U_0 + 2U_{-5})x^2}{50} + \frac{(U_{10} - 3U_5 + 3U_0 - U_{-5})x^3}{250}$$

reordenando y agregando el subíndice n-x

$$250U_n = (3x^3 - 25x^2 + 250)U_{n-x} + x(-3x^2 + 20x + 25)U_{n-x+5}$$

$$- x(x - 5)^2 U_{n-x-5} + x^2(x - 5)U_{n-x+10}$$

haciendo $x = 1, 2, 3, 4$ y 5 se obtiene el valor U'_x ajustado.

$$1250U'_n = 250U_n + 228(U_{n-1} + U_{n+1}) + 174(U_{n-2} + U_{n+2})$$

$$+ 106(U_{n-3} + U_{n+3}) + 42(U_{n-4} + U_{n+4}) - 16(U_{n-6} + U_{n+6})$$

$$- 18(U_{n-7} + U_{n+7}) - 12(U_{n-8} + U_{n+8}) - 4(U_{n-9} + U_{n+9})$$

sea $\beta_1 = U_{n-1} + U_{n+1}$, $\beta_2 = U_{n-2} + U_{n+2}$, . . . etc.

entonces,

$$U'_n = 0.2U_n + 0.182\beta_1 + 0.139\beta_2 + 0.085\beta_3 + 0.034\beta_4 \\ - (0.013\beta_6 + 0.014\beta_7 + 0.01\beta_8 + 0.003\beta_9)$$

Promedios Móviles.

Supóngase que se tiene una serie de n valores observados U_x , y que se desea obtener el valor corregido U'_x para cada elemento de la serie. Uno de los métodos más simples de corrección para el que es indiferente la forma explícita de la función, consiste en suponer que el valor de U'_x es la media aritmética entre U_x y los términos más próximos y equidistantes¹, en igual número a cada lado de este. Las aplicaciones más comunes implican el uso de un total de tres puntos, uno a cada lado de U_x , ó de 5, dos a cada lado de U_x . La fórmula de cálculo (con cinco puntos) es la siguiente :

$$U'_x = \frac{U_{x-2} + U_{x-1} + U_x + U_{x+1} + U_{x+2}}{5}$$

donde :

U_x = Elemento de la serie original.

U'_x = Valor ajustado.

Como es de esperar, los valores de los extremos se deberán determinar a través de otro proceso. A veces se sugiere, en lugar de emplear otro método, tomar los valores reales en esos

1. Antonio Lasheras Sanz, "Matemáticas del Seguro", pág. 205.

puntos o , en su defecto, aplicar la fórmula de promedios móviles a lo largo de toda la serie, como si los puntos que le antecederan y los que le siguen asumieran el valor cero. Esto naturalmente, si la tendencia del fenómeno en cuestión lo permite.

Por otra parte, es posible emplear el mismo método considerando como base diferentes números de puntos en diferentes tramos de la serie. De igual forma, la aplicación puede ser iterativa hasta lograr un patrón descriptivo de la tendencia del fenómeno, pero cuidando al igual que la suavidad la proximidad deseada respecto a la serie original.

Una vez determinado el patrón descriptivo del fenómeno es común observar que la suma de los datos originales difiere respecto a la suma los datos ajustados, esta diferencia puede evitarse si se incrementa o decrementa, según convenga, el nivel de la curva ajustada, una alternativa es la siguiente :

$$\dot{U}'_x = [(\sum_{i=1}^n U_i - \sum_{i=1}^n U'_i) / \sum_{i=1}^n U'_i] * U'_x + U'_x$$

donde:

- U_i = Elemento de la serie original para el que se ha obtenido un valor ajustado.
- n = Total de datos de la serie ajustada.
- U'_i = Elemento de la serie ajustada.
- U'_x = Nuevo valor ajustado para la edad "x".

Una de las desventajas de este método es el requerimiento de una cantidad extensa de datos en la serie original, ya que la serie ajustada tendrá menos elementos.

2.2.3 Métodos Analíticos.

El ajuste mediante un método analítico supone que la función que reproduce el fenómeno en cuestión tiene una fórmula dada, y que su aplicación se realiza con sólo encontrar los valores de las constantes involucradas. Sin embargo, en la realidad no siempre se tiene la ventaja de contar con esa función y por lo tanto el uso de estos métodos se restringe.

En relación al fenómeno de mortalidad, aún no se conoce una función que por si sola sea capaz de reproducir los valores de las probabilidades de muerte en el total del rango de vida. Dentro de las que más se han acercado está la función propuesta por *Gompertz* :

$$\mu_x = BC^x$$

y algunas otras en cuya construcción se toman como base las consideraciones hechas previamente por *Gompertz*, así tenemos, por ejemplo, el primer desarrollo a la ley de *Gompertz* o ley de *Makeham* :

$$\mu_x = A + BC^x$$

La ley de *Gompertz* supone que las primeras diferencias de $\ln(l(x))$ forman una progresión geométrica, la ley de *Makeham* aplaza esta característica a las segundas diferencias. Una tercera expresión desplazaría la característica aún más, hasta las quintas diferencias; tal expresión resulta de un segundo desarrollo de la ley de *Gompertz*¹:

$$\mu_x = A + Hx + BC^x$$

¹ Para información referente a su proceso de aplicación, consultar a José González Galé, "Elementos de Cálculo Actuarial" y a Antonio Lasheras Sanz, "Matemáticas del Seguro".

Posteriormente un actuario alemán, *Guillermo Lazarus*, desarrolló una expresión para dar mayor flexibilidad a la fórmula de *Makeham* :

$$\mu_x = A + B_1 C_1^x + B_2 C_2^x$$

Más sin embargo la situación sigue siendo la misma, aún no se tiene una función susceptible de aplicarse en el total del rango de vida. Lo que se hace a veces es ajustar alguna de las mencionadas anteriormente para un cierto intervalo de edades, en donde es posible su aplicación.

2.2.4 Pruebas de Suavidad.

Cuando se ajusta una serie es común preguntarse cuales son los efectos del método utilizado, efectos tales como la suavidad y la proximidad respecto a los datos originales son de primordial importancia. En realidad, un método no es mejor que otro, en todos los casos la decisión de optar por este o aquel se influye por las situaciones inherentes al problema en cuestión y los objetivos perseguidos. De cualquier forma, para fines de comparación entre varias series graduadas, correspondientes a una misma serie no graduada, siempre interesará saber la continuidad y uniformidad registrada de período a período.

Las pruebas de suavidad se realizan sobre $q(x)$, utilizando diferencias finitas. La medida numérica más usual es la suma de los cuadrados de las terceras diferencias :

$$\sum (\Delta^3 q(x))^2$$

o, alternativamente, la suma de los valores absolutos de las terceras diferencias :

$$\sum |\Delta^3 q(x)|$$

La más pequeña de las sumas corresponderá a la serie ajustada más suave.¹

Una medida numérica en sí no describe la suavidad de la serie ajustada, es más bien un factor de utilidad para fines comparativos. La suavidad se verifica inspeccionando, para cada uno de los órdenes de diferencias finitas que se haya calculado, la regularidad alcanzada de edad a edad. De esta forma, si la regularidad es aceptable hasta la segunda diferencia, se dice que la nueva serie es suave; pero si es satisfactoria hasta la tercera la nueva serie tendrá un grado de suavidad mayor. En otras palabras, la suavidad está en función de la variación entre los datos ajustados y el orden de las diferencias finitas.

2.2.5 Pruebas de Proximidad.

Otro aspecto importante además de la suavidad es la proximidad respecto a los datos originales. Las pruebas de proximidad se aplican sobre los muertos, utilizando las desviaciones calculadas de la resta de los muertos actuales menos los esperados, $d_{(x,n)} - d'_{(x,n)}$.

Dichas pruebas son diversa y de variada complejidad, su aplicación está en función del grado de precisión buscado, más específicamente, dependen del propósito para el cual se

¹ Morton D. Miller, "Elements of Graduation", pág. 8; Robert Henderson, "Mathematical Theory of Graduation", pág 8.

elabora la tabla, pues no tendría sentido utilizar procesos elaborados cuando el fin no lo justifica. Dentro de las más sencillas se encuentran las siguientes cuatro :

1. El primero y segundo momentos centrales deben ser aproximadamente los mismos tanto en la serie graduada como en la no graduada.

2. La suma de las desviaciones debe ser cero, esto es, el total de muertes esperadas utilizando la serie ajustada debe acercarse al total dado en los datos.

3. El primer momento central de las desviaciones debe ser cero :

$$\sum x[d(x) - d'(x)] = 0$$

4. Debe existir frecuencia en el cambio de signo y la extensión en la cual los términos positivos y negativos se equilibran uno con otro. Si una graduación muestra tanto el mismo número de cambios de signo como de permanencia en el signo en sus desviaciones, la graduación se considera satisfactoria a este respecto.

Para asegurar un acercamiento de la proximidad de los datos a través de la serie total, las desviaciones acumuladas también deben mostrar imparcialmente cambios frecuentes de signo.

Si el ajuste se lleva a cabo a través de una curva matemática se tendrá la suavidad propia de la función involucrada, la cual muy frecuentemente se considera satisfactoria sin necesidad de prueba alguna; no sucediendo lo mismo para la proximidad, que debe verificarse detalladamente.

2.3 METODOS DE INTERPOLACION.

Cuando se presenta la necesidad de obtener una serie de valores anuales a partir de valores quinquenales conocidos, una de las alternativas es recurrir a alguno de los múltiples procesos de interpolación. Estos procesos tienen la característica de proporcionar excelentes resultados cuando se cuenta con datos suficientemente extensos y sin requerimiento de una graduación preliminar para suavizarlos. De este modo, el grado de proximidad respecto a los datos originales estará dado por los valores sobre los que se interpola, mientras que la suavidad dependerá del método elegido para interpolar.

Consecuentemente, a lo largo del tiempo se han buscado métodos interpolatorios cuyo objeto de perfeccionamiento está íntimamente relacionado con la necesidad de incrementar la suavidad de los valores interpolados. Dentro de los primeros procesos de interpolación se encuentra la aplicación de fórmulas como la de diferencias centrales de Gauss :

$$U_{x+s} = U_x + s\Delta U_x + \frac{s(s-1)\Delta^2 U_{x-1}}{2!} + \dots$$

donde :

- U_x : Valor quinquenal conocido.
- ΔU_x : Primera diferencia de U_x .
- $\Delta^2 U_{x-1}$: Segunda diferencia de U_{x-1} .
- U_{x+s} : Valor interpolado.
- s : { 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 }

su uso origina que cuando dos segmentos de curvas vecinas no tienen la misma pendiente y derivadas del mismo orden en su punto común se produzca discontinuidad.

Esta situación da pie a la necesidad de incrementar el refinamiento de las series interpoladas, originándose la *interpolación osculatoria*; cuya característica principal es la búsqueda de que dos arcos interpolantes adyacentes se encuentren en su punto común en un trayecto tal que una o más derivadas sucesivas de la función de las curvas interpolantes sean iguales. Dentro de los métodos de este tipo se encuentran los desarrollados por *Karup-King* y *Sprague*, por mencionar algunos.:

Aplicar métodos osculatorios origina resultados aceptables, siempre que los puntos sobre los que se efectúe la interpolación formen una serie refinada. En caso contrario, habrá que ajustar los datos antes de realizar el proceso interpolatorio.

2.3.1 Método de Karup-King:

Dentro de los métodos de tipo osculatorio, uno de los más simples y más usados es el de *Karup-King*. Este método interpola en el intervalo $(x, x+1)$, auxiliándose del cálculo de diferencias centrales basadas en cuatro puntos equidistantes, U_{x-1} , U_x , U_{x+1} y U_{x+2} , llamados *puntos base*. Para construir la fórmula se requieren tres condiciones básicas :

- i) La curva interpolante debe pasar a través de los puntos base U_x , U_{x+1} .
- ii) La curva interpolante debe tener en U_x la misma tangente que la parábola que pasa a través de los puntos U_{x-1} , U_x y U_{x+1} .

- iii) La curva interpolante debe tener en U_{x+1} la misma tangente que la parábola que pasa a través de los puntos U_x , U_{x+1} , y U_{x+2} .

Partiendo de estas condiciones, se deduce la fórmula de Karup-King :

- A) El valor interpolado U_{x+s} , por la fórmula de Everett*, está dado como :

$$U_{x+s} = A(s)U_{x+1} + B(s)\delta^2 U_{x+1} + A(1-s)U_x + B(1-s)\delta^2 U_x \quad (3.1)$$

donde $A(s)$ y $B(s)$ son funciones de s de mínimo grado a determinar por las tres condiciones anteriores.

derivando respecto a s :

$$U'_{x+s} = A'(s)U_{x+1} + B'(s)\delta^2 U_{x+1} - A'(1-s)U_x - B'(1-s)\delta^2 U_x \quad (3.2)$$

- B) La parábola que pasa a través de los puntos base U_{x-1} , U_x y U_{x+1} :

por la fórmula de Gauss :

$$Y_{x+s} = U_x + s\Delta U_x + \frac{s(s-1)}{2} \Delta^2 U_{x-1}$$

de manera equivalente :

$$Y_{x+s} = U_x + s\Delta U_x + \frac{s(s-1)}{2} \delta^2 U_x$$

derivando respecto a s :

$$Y'_{x+s} = \Delta U_x + \frac{2s-1}{2} \delta^2 U_x \quad (3.3)$$

- C) La parábola que pasa a través de los puntos base U_x , U_{x+1} y U_{x+2} :

* Anexo B

$$Y_{x+1+s} = U_{x+1} + s\Delta U_{x+1} + \frac{s(s-1)}{2} \delta^2 U_{x+1}$$

derivando respecto a s

$$Y'_{x+1+s} = \Delta U_{x+1} + \frac{2s-1}{2} \delta^2 U_{x+1} \dots \dots \dots (3.4)$$

D) *Aplicando la condición (i).*

sustituyendo $s = 0$ en (3.1)

$$U_x = A(0)U_{x+1} + B(0)\delta^2 U_{x+1} + A(1)U_x + B(1)\delta^2 U_x \dots (3.5)$$

sustituyendo $s = 1$ en (3.1)

$$U_{x+1} = A(1)U_{x+1} + B(1)\delta^2 U_{x+1} + A(0)U_x + B(0)\delta^2 U_x . (3.6)$$

E) *Aplicando la condición (ii).*

sustituyendo $s = 0$ en (3.2) y en (3.3) e igualando ambas ecuaciones :

$$[A'(0)U_{x+1} + B'(0)\delta^2 U_{x+1} - A'(1)U_x - B'(1)\delta^2 U_x] - [(U_{x+1} - U_x) - (0.5)\delta^2 U_x] = 0$$

factorizando

$$U_{x+1}[A'(0)-1] - U_x[A'(1)-1] + B'(0)\delta^2 U_{x+1} + \delta^2 U_x[0.5 - B'(1)] = 0 \dots \dots \dots (3.7)$$

F) *Aplicando la condición (iii).*

sustituyendo $s = 1$ en (3.2) y $s = 0$ en (3.4) e igualando ambas ecuaciones

$$[A'(1)U_{x+1} + B'(1)\delta^2 U_{x+1} - A'(0)U_x - B'(0)\delta^2 U_x] - [(U_{x+1} - U_x) + 0.5\delta^2 U_{x+1}] = 0$$

* $\Delta U_{x+1} - 0.5\delta^2 U_{x+1} = \Delta U_x + 0.5\delta^2 U_{x+1}$

factorizando :

$$U_{x+1}[A'(1)-1] - U_x[A'(0)-1] - B'(0)\delta^2 U_x - \delta^2 U_{x+1}[0.5 - B'(1)] = 0 \dots\dots\dots (3.8)$$

G) *Fórmula de Karup-King para interpolar en el intervalo (x, x+1).*

Dado que las funciones A(s) y B(s) son completamente independientes de los valores numéricos de U_x, U_{x+1}, $\delta^2 U_x$ y $\delta^2 U_{x+1}$; de las ecuaciones (3.5), (3.6), (3.7) y (3.8) se deduce que :

$$A(0) = 0 \quad A(1) = 1 \quad A'(0) = 1 \quad A'(1) = 1$$

i.e., $\bar{A}(s) = s.$

análogamente,

$$B(0) = 0 \quad B(1) = 0 \quad B'(0) = 0 \quad B'(1) = 1/2$$

i.e., $B(s) = -\frac{s^2(1-s)}{2}$

finalmente, sustituyendo en (3.1).

FORMULA DE KARUP-KING

$U_{x+s} = sU_{x+1} - \frac{s^2(1-s)}{2} \delta^2 U_{x+1} + (1-s)U_x - \frac{(1-s)^2 [1 - (1-s)]}{2} \delta^2 U_x$
--

donde :

- s : { 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1 }
- $\delta^2 U_x$: Segunda diferencia central de U_x.
- U_{x+s} : Valor interpolado.

La aplicación de esta fórmula puede llevarse a cabo de dos formas, ya sea construyendo la tabla de diferencias y calculando los valores interpolados o, trabajando con fórmulas de interpolación de componente lineal. La segunda opción es la más empleada, ya que permite expresar cada valor a interpolar en términos de los puntos base, eliminando así el trabajo de crear la tabla de diferencias.

Las expresiones de componente lineal que permiten estimar los valores interpolados por el método de Karup-King se obtienen como sigue :

fórmula de karup-King

$$U_{x+s} = sU_{x+1} - \frac{s^2(1-s)}{2} \delta^2 U_{x+1} + (1-s)U_x + \frac{(1-s)^2[1-(1-s)]}{2} \delta^2 U_x$$

diferencias centrales en términos de U_x , U_{x+1} y U_{x+2} .

$$\delta^2 U_{x+1} = \Delta^2 U_x = U_{x+2} - 2U_{x+1} + U_x$$

$$\delta^2 U_x = \Delta^2 U_{x-1} = U_{x+1} - 2U_x + U_{x-1}$$

fórmula de Karup-King en términos de los puntos base.

$$U_{x+s} = sU_{x+1} - \frac{s^2(1-s)}{2} [U_{x+2} - 2U_{x+1} + U_x] + (1-s)U_x + \frac{(1-s)^2[1-(1-s)]}{2} [U_{x+1} - 2U_x + U_{x-1}]$$

sustituyendo y despejando para cada valor de s , se generan las fórmulas de componente lineal :

$$U_{x+.2} = -0.064U_{x-1} + 0.912U_x + 0.168U_{x+1} - 0.016U_{x+2}$$

$$U_{x+.4} = -0.072U_{x-1} + 0.696U_x + 0.424U_{x+1} - 0.048U_{x+2}$$

$$U_{x+.6} = -0.048U_{x-1} + 0.424U_x + 0.696U_{x+1} - 0.072U_{x+2}$$

$$U_{x+.8} = -0.016U_{x-1} + 0.168U_x + 0.912U_{x+1} - 0.064U_{x+2}$$

En la practica, es común realizar la interpolación por el método de Karup-King a través de una tabla integrada por coeficientes de expresiones de componente lineal (Anexo C, tabla c.2), las cuales solventan el problema de los extremos, cuando no se conoce U_{x-1} o U_{x+2} , a través del empleo adecuado de las matrices primera y tercera.

De la tabla de coeficientes, cada valor interpolado, U_{x+s} , en el intervalo $(x, x+1)$ se determina utilizando los valores de cuatro puntos contiguos en la serie y la matriz de coeficientes correspondientes :

Grupo superior

$$U_{x+s} = m_{1,s} U_x + m_{2,s} U_{x+1} + m_{3,s} U_{x+2} + m_{4,s} U_{x+3}$$

Grupos centrales

$$U_{x+s} = m_{1,s} U_{x-1} + m_{2,s} U_x + m_{3,s} U_{x+1} + m_{4,s} U_{x+2}$$

Grupo inferior

$$U_{x+s} = m_{1,s} U_{x-2} + m_{2,s} U_{x-1} + m_{3,s} U_x + m_{4,s} U_{x+1}$$

donde :

- U_x = valor conocido
- s = { 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 }
- $m_{i,s}$ = coeficientes de Karup-King acordes con la matriz respectiva.

La aplicación de este método no es sólo para interpolar en intervalos unitarios, también permite determinar para un intervalo quinquenal, por ejemplo $(x, x+5)$, los valores que asumirán los puntos intermedios $x+1, x+2, x+3$ y $x+4$.

Por otro lado, es conveniente mencionar que además de la fórmula que interpola en base a cuatro puntos es común el manejo de otra que involucra sólo tres. Su aplicación, a través de la respectiva tabla de coeficientes (Anexo C, Tabla C.3), es análoga respecto a la descrita anteriormente para cuatro puntos. Particularmente, se trata de un proceso para desagregar, en el que los valores parciales obtenidos suman exactamente el total correspondiente al intervalo sobre el que se interpola, por lo tanto podría utilizarse para interpolar en series de datos como la de la función $d(x,s)$.

2.3.2 Métodos de Beers, Greville y Sprague.

Clasificados dentro del conjunto de métodos osculatorios, presentan la característica de los procesos redistributivos, desagregando valores parciales cuya suma es exactamente el total registrado para el intervalo sobre el que se interpola.

En lo referente a su aplicación, se auxilian de tablas de multiplicadores (Anexo C, Tablas C.4, C.5 y C.6), cada tabla está constituida por cinco matrices de 5x5, la tercera se utiliza para interpolar en la mayor parte de los datos, mientras las cuatro restantes sólo se usan para los extremos.

En estos métodos se requiere tomar cinco puntos como base, por ejemplo, si se desea interpolar en el intervalo (x, x+5) los puntos base serán U_{x-10} , U_{x-5} , U_x , U_{x+5} , y U_{x+10} (U_x es el punto central); los cuales al ser multiplicados por la tercera matriz de cualquiera de las tres tablas de multiplicadores producirán los valores intermedios buscados. El problema inherente es, ahora, el procedimiento a seguir en los extremos cuando se carece de información sobre los puntos U_{x-10} y/o U_{x-5} , pero se conoce U_x , U_{x+5} , U_{x+10} , U_{x+15} y/o U_{x+20} ; o en su defecto, se desconoce U_{x+5} y/o U_{x+10} , pero se conoce U_x , U_{x-5} , U_{x-10} , U_{x-15} y/o U_{x-20} ; esta situación se soluciona de inmediato con la aplicación de las matrices primera, segunda, cuarta y quinta, según corresponda.

Cada valor interpolado se calcula a través de las expresiones siguientes :

Primer grupo

$$U_{x+s} = U_x N_{1,s} + U_{x+5} N_{2,s} + U_{x+10} N_{3,s} + U_{x+15} N_{4,s} + U_{x+20} N_{5,s}$$

Segundo grupo

$$U_{x+s} = U_{x-5} N_{1,s} + U_x N_{2,s} + U_{x+5} N_{3,s} + U_{x+10} N_{4,s} + U_{x+15} N_{5,s}$$

Grupos centrales.

$$U_{x+s} = U_{x-10}N_{1,s} + U_{x-5}N_{2,s} + U_xN_{3,s} + U_{x+5}N_{4,s} + U_{x+10}N_{5,s}$$

Penúltimo grupo

$$U_{x+s} = U_{x-15}N_{1,s} + U_{x-10}N_{2,s} + U_{x-5}N_{3,s} + U_xN_{4,s} + U_{x+5}N_{5,s}$$

Ultimo grupo

$$U_{x+s} = U_{x-20}N_{1,s} + U_{x-15}N_{2,s} + U_{x-10}N_{3,s} + U_{x-5}N_{4,s} + U_xN_{5,s}$$

donde :

... U_{x-5} , U_x , U_{x+5} ,... representan
totales quinquenales conocidos.

$$s = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$$

$N_{x,s}$ = Coeficiente de la tabla de
multiplicadores.

Como se observa, los puntos base son cinco , dos hacia cada lado del intervalo a desagregar (excepto para los grupos extremos); de ahí que con frecuencia se prefieran estos métodos sobre el método análogo de Karup-King, que toma sólo tres, pues merece más confianza un proceso que tiene en cuenta tanto valores de los puntos que presiden al intervalo como los de los que le siguen, en relación con otro que se basa sólo en sus puntos situados a uno y otro lado.

Por otro lado, es importante mencionar la utilidad de conocer la tendencia que regularmente sigue el fenómeno que se esté tratando ya que esto permitirá detectar la posibilidad de aplicación o no de los multiplicadores, dado que presentan limitaciones cuando la curva de datos originales aumenta muy rápidamente de un punto a otro, por ejemplo, en las edades 0-5 las probabilidades de muerte siguen un comportamiento tan irregular que la aplicación de multiplicadores no reflejaría el comportamiento real, por esta razón se hace un tratamiento especial para el intervalo en vez de utilizar la matriz para el primer grupo.

2.4 METODOS DE INTERPOLACION Y AJUSTE.**Fórmulas Osculatorias Modificadas.**

Buscando obtener un suavizamiento mayor en la series de valores interpolados, W. A. Jenkins desarrolló un conjunto de fórmulas conocidas como *Fórmulas Osculatorias Modificadas*. La idea base para su construcción consiste en buscar que dos arcos interpolantes adyacentes se encuentren en un trayecto tal que un número específico de derivadas sucesivas de las funciones de las curvas interpolantes sean iguales en su punto común.

Las fórmulas osculatorias modificadas no reproducen los puntos que toman como base para su aplicación (U_x), al contrario, generan una curva que pasa entre ellos, lo que a fin de cuentas aporta elementos de ajustamiento. Consecuentemente, cuando se tiene una serie de datos que al ser interpolados dan origen a una nueva serie catalogada como irregular, se opta por utilizar fórmulas osculatorias, las cuales, además de introducir cierto grado de ajustamiento, tienen la posibilidad de medir la desviación respecto a cada punto U_x , por ejemplo, en la fórmula que se explica a continuación, las desviaciones son de $-(1/36)\delta^4 U_x$.

La más usada de las fórmulas osculatorias modificadas toma como base seis puntos, U_{x-2} , U_{x-1} , U_x , U_{x+1} , U_{x+2} y U_{x+3} , para interpolar en el intervalo $(x, x+1)$. Su construcción parte de dos condiciones básicas :

- i) En el punto x , las funciones de la curva interpolante para los intervalos vecinos $(x-1, x)$ y $(x, x+1)$ deben tener el mismo valor, y encontrarse en su primera y segunda derivada, respectivamente.

- ii) Cuando los cinco puntos pivotaes, U_{x-2} , U_{x-1} , U_x , U_{x+1} y U_{x+2} se encuentren en la misma curva de tercer grado, el punto de coincidencia de las curvas interpolantes en x deberá ser el punto pivotal U_x .

Deduciendo la fórmula correspondiente :

- A) El valor interpolado U_{x+s} para el intervalo de x a $x+1$ está dado, por la fórmula de Everett, como :

$$U_{x+s} = A(s)U_{x+1} + B(s)\delta^2 U_{x+1} + C(s)\delta^4 U_{x+1} + \\ + A(1-s)U_x + B(1-s)\delta^2 U_x + C(1-s)\delta^4 U_x \dots \quad (4.1)$$

donde $A(s)$, $B(s)$ y $C(s)$ son funciones de s de mínimo grado que se determinarán por las dos condiciones anteriores,

derivando respecto a s :

$$U'_{x+s} = A'(s)U_{x+1} + B'(s)\delta^2 U_{x+1} + C'(s)\delta^4 U_{x+1} - \\ - A'(1-s)U_x - B'(1-s)\delta^2 U_x - C'(1-s)\delta^4 U_x \dots \quad (4.2)$$

la segunda derivada respecto a s

$$U''_{x+s} = A''(s)U_{x+1} + B''(s)\delta^2 U_{x+1} + C''(s)\delta^4 U_{x+1} + \\ + A''(1-s)U_x + B''(1-s)\delta^2 U_x + C''(1-s)\delta^4 U_x \dots \quad (4.3)$$

El valor interpolado U_{x-1+s} , para el intervalo de $x-1$ a x , y sus correspondientes primera y segunda derivada se obtienen substituyendo en (4.1), (4.2) y (4.3), x , por $x-1$.

- B) Aplicando la condición (i).

- 1 Sustituyendo $s = 0$ en (4.1) y $s = 1$ con $x = x-1$ en (4.1) e igualando ambas ecuaciones :

$$A(0)[U_{x+1} - U_{x-1}] + B(0)[\delta^2 U_{x+1} - \delta^2 U_{x-1}] \\ + C(0)[\delta^4 U_{x+1} - \delta^4 U_{x-1}] = 0$$

de aquí se tiene $A(0) = B(0) = C(0) = 0$

2 Sustituyendo $s = 0$ en (4.2) y $s = 1$ con $x = x-1$ en (4.2) e igualando ambas ecuaciones, i.e., se igualan las primeras derivadas.

$$A'(0)[U_{x+1} + U_{x-1}] - 2A'(1)U_x + B'(0)[\delta^2 U_{x+1} + \delta^2 U_{x-1}] - 2B'(1)\delta^2 U_x + C'(0)[\delta^4 U_{x+1} + \delta^4 U_{x-1}] - 2C'(1)\delta^4 U_x = 0$$

considerando que

$$\begin{aligned} [U_{x+1} + U_{x-1}] &= [U_{x+1} - 2U_x + U_{x+1} + 2U_x] = [\delta^2 U_x + 2U_x] \\ [\delta^2 U_{x+1} + \delta^2 U_{x-1}] &= [\delta^4 U_x + 2\delta^2 U_x] \end{aligned}$$

reagrupando términos

$$2[A'(0) - A'(1)]U_x + [A'(0) - 2B'(1) + 2B'(0)]\delta^2 U_x + C'(0)[\delta^4 U_{x+1} + \delta^4 U_{x-1}] + [B'(0) - 2C'(1)]\delta^4 U_x = 0$$

$$\begin{aligned} \text{de donde } A'(0) &= A'(1), & A'(0) - 2B'(1) + 2B'(0) &= 0 \\ C'(0) &= 0, & B'(0) &= 2C'(1) \end{aligned}$$

3 Sustituyendo $s = 0$ en (4.3) y $s = 1$ con $x = x-1$ en (4.3) e igualando ambas ecuaciones, i.e., se igualan las segundas derivadas.

$$A''(0)[U_{x+1} - U_{x-1}] + B''(0)[\delta^2 U_{x+1} - \delta^2 U_{x-1}] + C''(0)[\delta^4 U_{x+1} - \delta^4 U_{x-1}] = 0$$

$$\text{donde } A''(0) = B''(0) = C''(0) = 0$$

c) Aplicando la condición (ii).

Con $\delta^4 U_x = 0$, se tiene

$$U_x = A(0)U_{x+1} + B(0)\delta^2 U_{x+1} + C(0)\delta^4 U_{x+1} + A(1)U_x + B(1)\delta^2 U_x + C(1)\delta^4 U_x$$

$$\text{de donde } A(1) = 1, \quad B(1) = 0$$

D) Las funciones de mínimo grado para $A(s)$, $B(s)$ y $C(s)$.

para satisfacer

$$A(0) = 0 \quad A''(0) = 0 \quad \text{y} \quad A(1) = 1$$

se tiene $A(s) = s$, de donde $A'(0) = 1$

para satisfacer

$$B(0) = 0 \quad B(1) = 0 \quad B''(0) = 0$$

y $2B'(0) - 2B'(1) + 1 = 0$

$$\text{se tiene } B(s) = \frac{s(s^2-1)}{6}$$

de donde $B'(0) = -1/6$

para satisfacer

$$C(0) = 0 \quad C'(0) = 0 \quad C''(0) = 0$$

y $2C'(1) + 1/6 = 0$

$$\text{se tiene } C(s) = \frac{-s^3}{36}$$

E) Fórmula osculatoria modificada de Jenkins para interpolar en el intervalo $x, x+1$, tomando como base seis puntos.

sustituyendo en (4.1) las funciones de mínimo grado de s .

FORMULA DE JENKINS

$$U_{x+s} = sU_{x+1} + \frac{s(s^2-1)}{6} \delta^2 U_{x+1} - \frac{s^3}{36} \delta^4 U_{x+1}$$

$$+ (1-s)U_x + \frac{(1-s)[(1-s)^2-1]}{6} \delta^2 U_x - \frac{(1-s)^3}{36} \delta^4 U_x$$

donde :

$$s : \{ 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 \}$$

$$\delta^2 U_x : \text{segunda diferencia central de } U_x.$$

$$\delta^4 U_x : \text{cuarta diferencia central de } U_x.$$

Esta fórmula pertenece a la familia de fórmulas osculatorias modificadas de diferentes órdenes de derivadas; las cuales se pueden construir haciendo las sustituciones correspondientes en las condiciones iniciales (i) y (ii).

Su aplicación se lleva a través de la correspondiente tabla de diferencias o, en su defecto, utilizando las expresiones de componente lineal. Para la fórmula aquí desarrollada los coeficientes se obtienen de la siguiente manera :

consideremos las expresiones que ponen a las diferencias centrales en términos de U_{x-2} , U_{x-1} , U_x , U_{x+1} , U_{x+2} y U_{x+3} :

$$\begin{aligned} \delta^2 U_x &= U_{x+1} - 2U_x + U_{x-1}; \\ \delta^4 U_x &= U_{x+2} - 4U_{x+1} + 6U_x - 4U_{x-1} + U_{x-2} \end{aligned}$$

entonces, la fórmula de Jenkins en términos de los puntos base:

$$\begin{aligned} U_{x+s} &= sU_{x+1} + \frac{s(s^2 - 1)}{6} [U_{x+2} - 2U_{x+1} + U_x] - \frac{s^3}{36} [U_{x+3} - 4U_{x+2} + \\ &+ 6U_{x+1} - 4U_x + U_{x-1}] + (1-s)U_x + \frac{(1-s)[(1-s)^2 - 1]}{6} [U_{x+1} - 2U_x + \\ &+ U_{x-1}] - \frac{(1-s)^3}{36} [U_{x+2} - 4U_{x+1} + 6U_x - 4U_{x-1} + U_{x-2}] \end{aligned}$$

Sustituyendo y despejando para cada valor de s , se obtienen las expresiones de componente lineal :

$$\begin{aligned} U_{x+.2} &= - 0.01422U_{x-2} + 0.00867U_{x-1} + 0.77956U_x + 0.27156U_{x+1} \\ &\quad - 0.04533U_{x+2} - 0.00022U_{x+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{x+.4} &= - 0.00600U_{x-2} - 0.04178U_{x-1} + 0.64311U_x + 0.46133U_{x+1} \\ &\quad - 0.05489U_{x+2} - 0.00178U_{x+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{x+.6} &= - 0.00178U_{x-2} - 0.05489U_{x-1} + 0.46133U_x + 0.64311U_{x+1} \\ &\quad - 0.04178U_{x+2} - 0.00600U_{x+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{x+.8} &= - 0.00022U_{x-2} - 0.04533U_{x-1} + 0.27156U_x + 0.77956U_{x+1} \\ &\quad + 0.00867U_{x+2} - 0.01422U_{x+3} \end{aligned}$$

2.5 EXTRAPOLACION.

Frecuentemente los datos quinquenales disponibles no describen explícitamente el comportamiento de la mortalidad en edades avanzadas, por lo que es indispensable recurrir al empleo de métodos que auxilién en la predicción de lo que se supone podría suceder en el futuro, de continuar con las condiciones que provocan la ocurrencia del fenómeno. En este caso, las funciones más utilizadas son la de *Gompertz* y la de *Gompertz-Makeham*. Recientemente se ha difundido otra, a la que llamaremos *Gompertz Modificada*; esta nueva hipótesis se basa en estudios que muestran como el incremento en las tasas de mortalidad es semejante al de una curva *Gompertz* desde aproximadamente edades 35-40 y hasta cerca de entre 85-90, mientras que en edades posteriores sufre incrementos cada vez más pequeños, que difieren de una curva *Gompertz*.

2.5.1 Hipótesis de Gompertz.

Gompertz vislumbraba la posibilidad de que la muerte fuese la consecuencia de dos causas generalmente coexistentes, el azar y la deterioración o impotencia creciente para resistir la destrucción, sin embargo expresó la fuerza de mortalidad como una función exponencial que considera únicamente las causas de mortalidad producto de la edad.

En el desempeño de su investigación observó el proceso de extinción de una población y concluyó que con el transcurso del tiempo, la resistencia del hombre a la muerte crece proporcionalmente a la misma. Definió esa resistencia como el recíproco de la tasa instantánea de mortalidad (intensidad de la mortalidad con relación a un tiempo infinitamente pequeño) :

$$-\mu_x \frac{d(1/\mu_x)}{dx} = r \dots \dots \dots (5.1)$$

donde

μ_x = tasa instantánea de mortalidad

r = tasa a la cual crece la resistencia del hombre a la muerte.

Integrando sobre (5.1), con $(1/\mu_x)$ constante

$$\frac{\int \frac{d(1/\mu_x)}{dx} dx}{(1/\mu_x)} = - \int r dx$$

$$\text{Ln}(1/\mu_x) + C_1 = - rx + C_2$$

$$\text{Ln} \left(\frac{e^{C_1 - C_2}}{\mu_x} \right) = - \text{Ln}(e^{rx})$$

sea $B = e^{C_1 - C_2}$, $C = e^r$

directamente se tiene una expresión para μ_x :

$$\boxed{\mu_x = BC^x} \dots \dots \dots (5.2)$$

con B y C constantes a determinar.

Una forma de ajustar una curva Gompertz sobre valores experimentales de $l(x)$ sugiere, en primera instancia, poner a μ_x en términos de la función de sobrevivencia $l(x)$:

Integrando sobre (5.2)

$$- \int \frac{d \text{Ln}(l(x))}{dx} dx = \int BC^x dx$$

$$\text{Ln}(l(x)) = \frac{-BC^x}{\text{Ln}(C)} + \text{Ln}\left(e^{c_1 - c_2}\right)$$

$$\text{sea } \text{Ln}(g) = \frac{B}{\text{Ln}(C)}, \quad K = e^{c_1 - c_2}$$

$$\boxed{l(x) = Kg^{C^x}} \quad \dots \quad (5.3)$$

En la expresión (5.3) se encuentran involucradas tres constantes. Para determinarlas se toman como base tres grupos de valores experimentales de $l(x)$, no traslapados y con igual número de elementos.

Antes de integrar los grupos, consideremos una transformación de escala y origen (ver 1.4). Sea un conjunto de n valores experimentales de $l(x)$, que se correspondan con n edades equidistantes x_0, x_1, \dots, x_{n-1} . Tomemos como nuevo origen el cero y para determinar la nueva escala hagamos $x_0=0, x_1=1, x_2=2, \dots, x_{n-1}=n-1$. Esto lleva a que $l(0) = l(x_0), l(1) = l(x_1), \dots, l(n-1) = l(x_{n-1})$. Definamos $Z(i)$ como el valor experimental $l(x_i)$, entonces :

$$Z(i) = l(x_i), \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

donde, de acuerdo con la ley de Gompertz, se cumple :

$$\text{Ln}(Z(i)) = \text{Ln}(K) + C^i \text{Ln}(g) \quad \text{para toda } i.$$

Si dividimos los n valores experimentales $l(x)$ en 3 grupos no traslapados, con t elementos cada uno, tendremos :

$$\text{Serie}_1 = \sum_{j=0}^{t-1} \text{Ln}(Z(i)) = \sum_{l=0}^{t-1} \text{Ln}(K) + \text{Ln}(g) \sum_{l=0}^{t-1} C^l$$

$$\text{Serie}_2 = \sum_{l=t}^{2t-1} \text{Ln}(Z(i)) = \sum_{l=t}^{2t-1} \text{Ln}(K) + \text{Ln}(g) \sum_{l=t}^{2t-1} C^l$$

$$\text{Serie}_3 = \sum_{l=2t}^{3t-1} \text{Ln}(Z(i)) = \sum_{m=2t}^{3t-1} \text{Ln}(K) + \text{Ln}(g) \sum_{m=2t}^{3t-1} C^l$$

simpilficando

$$\text{Serie}_1 (S_1) = t\text{Ln}(k) + \text{Ln}(g) \frac{C^t - 1}{C - 1}$$

$$\text{Serie}_2 (S_2) = t\text{Ln}(k) + \text{Ln}(g) \frac{C^t (C^t - 1)}{C - 1}$$

$$\text{Serie}_3 (S_3) = t\text{Ln}(k) + \text{Ln}(g) \frac{C^{2t} (C^t - 1)}{C - 1}$$

tomando primeras diferencias

$$\Delta S_1 = \text{Ln}(g) \frac{(C^t - 1)^2}{C - 1} ; \quad \Delta S_2 = \text{Ln}(g) \frac{C^t (C^t - 1)^2}{C - 1}$$

finalmente, se obtienen las expresiones para las constantes :

$$C = \left[\frac{\Delta S_2}{\Delta S_1} \right]^{(1/t)} ; \quad \text{Ln}(g) = \frac{\Delta S_1 (C-1)}{(C^t - 1)^2}$$

$$\text{Ln}(K) = \left[S_1 - \text{Ln}(g) \frac{(C^t - 1)}{C - 1} \right] \frac{1}{t}$$

Determinando las constantes a través de estas expresiones y sustituyéndolas en (5.3), variando x por los valores $0, 1, 2, \dots, n-1$, se obtiene la curva ajustada correspondiente al conjunto de n observaciones experimentales de $l(x)$. Si estas observaciones pertenecen a grupos quinquenales, los valores anuales resultan variando x en los valores quintos, esto es, por $0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, \dots$ hasta $n-1$.

2.5.2 Hipótesis de Gompertz-Makeham.

En 1860, el Act. Guillermo Mateo Makeham dió a conocer sus estudios sobre mortalidad, en ellos propuso una modificación a la hipótesis de Gompertz, introduciendo una constante asociada con el efecto de las causas de muerte dependientes del azar, ese azar al que Gompertz ya había hecho referencia y que por alguna razón no plasmó en su fórmula.

La Hipótesis de Gompertz-Makeham define la fuerza de mortalidad como :

$$\boxed{\mu_x = A + BC^x} \quad (5.4)$$

En términos de la función de sobrevivencia $l(x)$:

integrando sobre (5.4)

$$\int \frac{-d \ln(l(x))}{dx} dx = \int (A + BC^x) dx$$

$$\ln(l(x)) = -A - B \frac{C^x}{\ln(C)} + e^{c_1 - c_2}$$

sea

$$- A = \text{Ln}(s) ; \quad \frac{- B}{\text{Ln}(C)} = \text{Ln}(g) ; \quad K = e^{C_1 - C_2}$$

la función de sobrevivencia :

$$l(x) = KS^x g^{C^x} \dots \dots \dots (5.5)$$

La hipótesis de Gompertz-Makeham tiene como alternativa de aplicación, un procedimiento análogo al utilizado para la hipótesis de Gompertz. Auxiliándose de la función de sobrevivencia $l(x)$ se construyen, sobre los valores experimentales de esta, cuatro series de datos no superpuestos con igual número de elementos. Para cada serie, se forman las expresiones de las sumas de los logaritmos naturales de sus elementos, se obtienen tanto la primera como la segunda diferencia respecto a las sumas y finalmente se deducen las expresiones para las constantes :

$$C = \left[\frac{\Delta^2 S_2}{\Delta^2 S_1} \right]^{(1/t)} \qquad \text{Ln}(g) = \frac{(\Delta^2 S_1)(C-1)}{(C^t-1)^3}$$

$$\text{Ln}(S) = \frac{1}{t^2} \left[(\Delta S_1) - \text{Ln}(g) \frac{(C^t-1)^2}{C-1} \right]$$

$$\text{Ln}(K) = \frac{1}{t} \left[S_1 - \frac{t(t-1)}{2} \text{Ln}(S) - \text{Ln}(g) \frac{(C^t-1)}{C-1} \right]$$

donde $S_i =$ Suma del logaritmo natural de los elementos de la serie i .
 $i = (1, 2, 3, 4)$

Otro procedimiento alternativo para ajustar una curva *Gompert-Makeham* consiste en auxiliarse de probabilidades quinquenales de muerte, $q(x, 5)$. Partamos de que $p(x, n) = 1 - q(x, n)$ y expresemos $P(x, n)$ en términos de la expresión de $l(x)$:

$$p(x, n) = \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{KS^{x+n}g^{C^{x+n}}}{KS^xg^{C^x}}$$

tomando logaritmo natural

$$\ln(p(x, n)) = n \ln(S) + C^x(C^n - 1) \ln(g) \quad \dots \dots (5.6)$$

El valor de $p(x, n)$ puede ser el de $1 - q(x, 5)$ o, en su defecto el de $p(x, 10) = (p(x, 5))(p(x+5, 5))$, etc. según se desee y convenga a los objetivos perseguidos.

Las constantes a determinar son K, S, g y C . Tomando la expresión (5.6) y los datos $p(x, n)$, $p(x+n, n)$ y $p(x+2n, n)$ se pueden estimar los valores de esas constantes :

$$\begin{aligned} \ln(p(x, n)) &= n \ln(S) + C^x(C^n - 1) \ln(g) \\ \ln(p(x+n, n)) &= n \ln(S) + C^{x+n}(C^n - 1) \ln(g) \\ \ln(p(x+2n, n)) &= n \ln(S) + C^{x+2n}(C^n - 1) \ln(g) \end{aligned}$$

tomando primeras diferencias

$$\begin{aligned} \Delta \ln(p(x, n)) &= C^x \ln(g) (C^n - 1)^2 \\ \Delta \ln(p(x+n, n)) &= C^{x+n} \ln(g) (C^n - 1)^2 \end{aligned}$$

las constantes se pueden calcular como :

$$C = \left(\frac{\Delta \ln(p(x+n, n))}{\Delta \ln(p(x, n))} \right)^{(1/n)} \quad \ln(g) = \frac{\Delta \ln(p(x, n))}{C^x (C^n - 1)^2}$$

$$\ln(S) = \frac{1}{n} \left(\ln(p(x, n)) - C^x (C^n - 1) \ln(g) \right)$$

El valor de la constante K debe permitir un valor inicial adecuado. Sea $l(x)$ el valor inicial deseado, entonces :

$$l(x) = kS^x g^{C^x}$$

$$\text{Ln}(l(x)) = \text{Ln}(k) + x\text{Ln}(S) + C^x\text{Ln}(g)$$

$$K = \text{Exp}\left(\text{Ln}(l(x)) - x\text{Ln}(S) - C^x\text{Ln}(g)\right)$$

Este procedimiento de ajuste en base a la serie de $p(x,n)$ también se puede emplear para ajustar una curva *Gompertz*. Haciendo las consideraciones pertinentes, las fórmulas que corresponderían son :

$$C = \left(\frac{\text{Ln}(P(x+n, n))}{\text{Ln}(P(x, n))} \right)^{(1/n)} \quad \text{Ln}(g) = \frac{\text{Ln}(P(x, n))}{C^x (C^n - 1)} \quad K = \frac{l(x)}{g^{C^x}}$$

2.5.3 Hipótesis Gompertz Modificada.

Un estudio realizado en Estados Unidos por el Act. Francisco R. Bayó, publicado en el año de 1972, comprueba la hipótesis que señala la inaceptabilidad de un comportamiento Gompertz en la tasa de mortalidad para edades muy avanzadas (mayores a 85 o 90) :

"... la curva Gompertz no es una representación aceptable de la mortalidad en edades muy avanzadas. Una tasa de mortalidad incrementada geoméricamente como la curva Gompertz sería aceptable hasta la edad 85 o 90, pero encima de esas edades la mortalidad se incrementaría a una tasa progresivamente más pequeña (no con una tasa constante como lo requiere la curva Gompertz)... " *

* Bayo Francisco, Mortality of life, pág. 19

Como se mencionó anteriormente, las funciones matemáticas de *Gompertz* y *Gompertz-Makeham* ajustadas en el total del rango de vida, no describen los cambios registrados por la curva de mortalidad en edades jóvenes y parte de las medianas, en consecuencia, suelen ajustarse sólo para el intervalo en que la tasa de mortalidad se vuelve monótona y creciente. Ahora bien, este hecho es comunmente aceptado, en lo que existe discusión es respecto a la edad límite de aplicación de estas hipótesis. Algunos estudios sugieren que su aplicación se continúa hasta lograr la extinción poblacional; sin embargo, el estudio al que se hace alusión al inicio de este punto sugiere la aplicación de la hipótesis *Gompertz* solo hasta edad 85 o 90; mientras que para edades posteriores propone un crecimiento progresivamente menor.

Supóngase que se aplica la hipótesis *Gompertz* para extrapolar hasta el final de la tabla; sea " j_x " la tasa de crecimiento que registra la probabilidad de muerte a edad x en relación con la probabilidad de muerte a edad $x-1$ y sea " k ", $0 < k \leq 1$, el porcentaje al cual se hará decrecer progresivamente la tasa " j_x " después de edad 90 u 85, según convenga, entonces :

$$\begin{aligned} q_{(90)} &= q_{(89)} (1 + j_{90} k^0) \\ q_{(91)} &= q_{(90)} (1 + j_{91} k^1) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ q_{(w)} &= q_{(w-1)} (1 + j_w k^{w-90}) \end{aligned}$$

donde :

w = edad límite de la tabla.

La consecuencia principal de la aplicación de un decrecimiento progresivo para la tasa de mortalidad correspondiente a edades posteriores a 85 o 90 es la aportación de elementos contribuyentes al incremento de la esperanza de vida. Este

incremento depende del valor asumido por "k", entre más se acerque a uno, menor incremento y viceversa, entre más se aleje mayor incremento.

Si el valor de "k" es uno, se tendrá un acercamiento a un ajuste seguido por *Gompertz*. Por otro lado, su desviación respecto a la unidad está muy condicionada por los datos originales, como son el número de personas que en promedio se suponen vigentes en el período a extrapolar, la esperanza registrada para el total del grupo que se extrapola, etc.

Por otro lado, es conveniente mencionar que frecuentemente se observa que el crecimiento de las probabilidades de muerte entre las edades 79-80 es alrededor de 8% para hombres y de 9% para mujeres. Esto es un indicador que en un momento dado puede auxiliar en la extrapolación que llevará a concretar la tabla de mortalidad por edad.

CAPITULO III

APLICACION PRACTICA

En esta sección se describe y desarrolla una alternativa para para deducir una tabla de mortalidad por edades únicas a partir de una tabla quinquenal, su punto de partida es la subdivisión del rango de vida en tres intervalos :

1. Intervalo superior, edades (0-4),
2. Intervalo central, edades (5-79), e
3. Intervalo inferior, edades (80-w)

Para el intervalo superior, donde se registran los decrementos más acelerados de la mortalidad, se tomará la tendencia implícita en una tabla por edad previamente elaborada, cuyas características permitan homologar el fenómeno.

En las edades 5-79, considerando que la tabla quinquenal se construyó en base a datos estadísticos y con cierto grado de suavizamiento, se aplica un método de interpolación. También se prevee el caso de que la serie interpolada no guarde la regularidad deseada y haya necesidad de adicionar un proceso de graduación.

Para el intervalo inferior se adoptará como criterio de extrapolación la hipótesis *Gompertz Modificada*, con base en la tendencia de mortalidad indicada por la tabla quinquenal para edades mayores a 60.

En función de las anteriores consideraciones, la serie anual estimada mostrará un cierto grado de proporción entre suavidad y proximidad, el cual, para hacer aceptable la nueva serie debe mantenerse dentro de los parámetros marcados por los propósitos para los que se elabora la tabla.

En el desarrollo de este ejemplo se tomarán los datos de una tabla quinquenal de mortalidad para México en el período 1990-1995, correspondiente al sexo masculino¹ (cuadro 1).

Cuadro-1

Hombres
México (1990-95)

Edad	n	l(x)	d(x,n)	q(x,n)	P(x,x+5)	L(x,n)	T(x)	$\overset{\circ}{e}(x)$	m(x,n)
0	1	100,000	4,110	0.0411	0.9918	96,753	6,710,254	67.10	0.0425
1	4	95,890	895	0.0093	0.0000	381,305	6,613,501	68.97	0.0024
5	5	94,995	342	0.0036	0.9966	474,120	6,232,196	65.61	0.0007
10	5	94,653	310	0.0033	0.9947	472,491	5,758,076	60.83	0.0007
15	5	94,344	697	0.0074	0.9899	469,973	5,285,585	56.02	0.0015
20	5	93,647	1,203	0.0129	0.9857	465,222	4,815,612	51.42	0.0026
25	5	92,443	1,459	0.0158	0.9831	458,566	4,350,390	47.06	0.0032
30	5	90,985	1,638	0.0180	0.9809	450,823	3,891,824	42.77	0.0036
35	5	89,347	1,809	0.0203	0.9770	442,205	3,441,001	38.51	0.0041
40	5	87,538	2,266	0.0259	0.9702	432,014	2,998,796	34.26	0.0053
45	5	85,271	2,884	0.0338	0.9602	419,139	2,566,782	30.10	0.0069
50	5	82,387	3,795	0.0461	0.9439	402,444	2,147,643	26.07	0.0094
55	5	78,593	5,240	0.0667	0.9211	379,859	1,745,199	22.21	0.0138
60	5	73,353	6,748	0.0920	0.8855	349,891	1,365,340	18.61	0.0193
65	5	66,605	9,271	0.1392	0.8365	309,844	1,015,449	15.25	0.0299
70	5	57,334	10,995	0.1918	0.7659	259,179	705,605	12.31	0.0424
75	5	46,339	13,281	0.2866	0.0000	198,491	446,426	9.63	0.0669
80	w	33,058	33,058	1.0000	0.0000	247,935	247,935	7.50	0.1333
				P(75,w):		0.5554			

3.1 ANALISIS DE LOS DATOS.

En una primera instancia se realiza una comparación de los valores que asume $q(x,n)$ en el período 1990-95, con respecto a períodos anteriores, se tomará 1960-90. Esto es importante porque cuando el fenómeno en cuestión ha venido conservando una tendencia semejante a través de un largo período de tiempo es

¹ Información proporcionada por "El Centro Latinoamericano de Demografía y Estadística", (CELADE).

posible suponer comportamientos futuros análogos, siempre que se conserven las condiciones que provocan su ocurrencia. Por lo tanto, cuando se detectan desviaciones fuertes respecto a la tendencia que se venía registrando, regularmente se tiene un indicador que refleja la existencia de algún problema, como mala captura de datos, tratamiento inadecuado de la información, conflictos económicos políticos o sociales, avances importantes en medicina , etc.

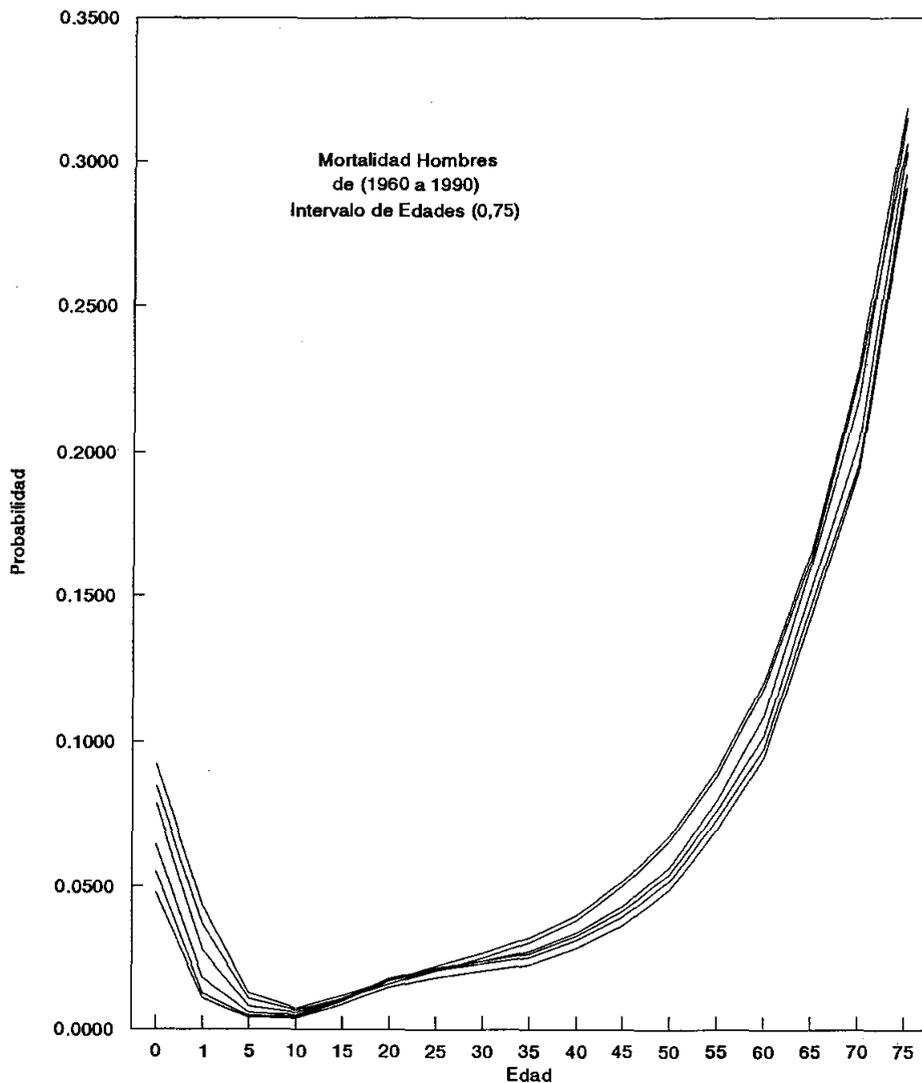
Cuadro-2 Probabilidades de Muerte Hombres México (1960-95)

Edad	60-65	65-70	70-75	75-80	80-85	85-90	90-95	Promedio (60-90)
0	0.09225	0.08475	0.07866	0.06516	0.05553	0.04806	0.04110	0.07073
1	0.04324	0.03672	0.02769	0.01798	0.01249	0.01086	0.00933	0.02483
5	0.01245	0.01070	0.00789	0.00590	0.00469	0.00413	0.00360	0.00763
10	0.00735	0.00656	0.00573	0.00489	0.00425	0.00374	0.00327	0.00542
15	0.01173	0.01065	0.01051	0.01030	0.00973	0.00852	0.00739	0.01024
20	0.01721	0.01569	0.01759	0.01770	0.01694	0.01482	0.01285	0.01666
25	0.02204	0.02046	0.02107	0.02138	0.02058	0.01810	0.01578	0.02061
30	0.02674	0.02499	0.02384	0.02397	0.02303	0.02042	0.01800	0.02383
35	0.03204	0.03039	0.02735	0.02653	0.02515	0.02262	0.02025	0.02735
40	0.03998	0.03829	0.03388	0.03285	0.03126	0.02848	0.02589	0.03412
45	0.05201	0.05020	0.04330	0.04151	0.03950	0.03656	0.03382	0.04385
50	0.06790	0.06612	0.05704	0.05449	0.05202	0.04893	0.04606	0.05775
55	0.09048	0.08843	0.08008	0.07660	0.07350	0.06996	0.06667	0.07984
60	0.12054	0.11827	0.10873	0.10216	0.09773	0.09476	0.09199	0.10703
65	0.16563	0.16309	0.16069	0.15230	0.14661	0.14277	0.13920	0.15518
70	0.22964	0.22693	0.21920	0.20445	0.19619	0.19390	0.19177	0.21172
75	0.31883	0.30648	0.31529	0.30324	0.29545	0.29086	0.28660	0.30503
80	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

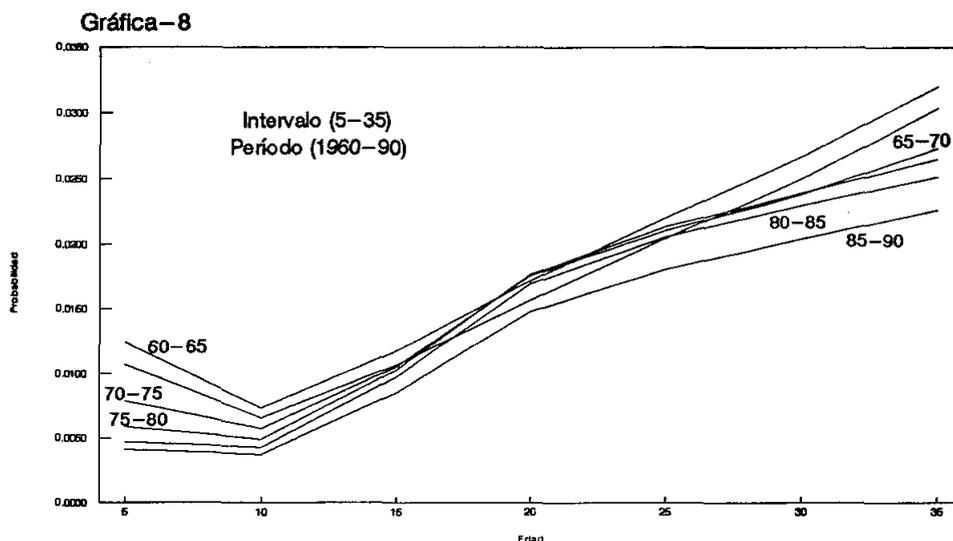
La base para detectar desviaciones en la tendencia de la mortalidad del quinquenio 1990-95 la constituyen los valores de las probabilidades de muerte en los diferentes períodos quinquenales de los años 1960-90 (cuadro 2). De las gráficas de estos datos (Gráfica-7) se percibe que en ciertos intervalos del rango de vida las curvas de mortalidad han experimentado un

decrecimiento con el transcurso del tiempo. Sin embargo en las edades 5-35 se aprecia una combinación de crecimiento y decrecimiento entre las curvas de los diferentes quinquenios, algo similar sucede después de la edad 60, aunque menos drástico que en 5-35.

Gráfica-7



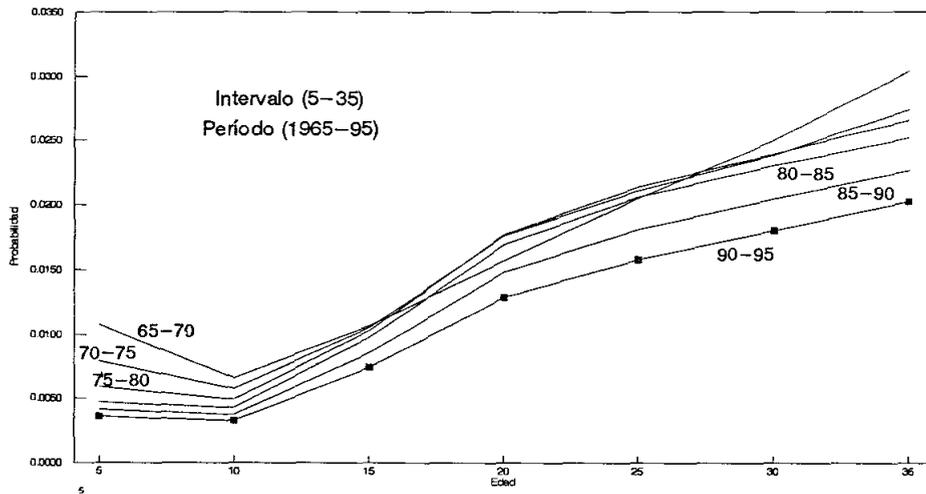
Tomando de cerca el intervalo 5-35 de la gráfica-7 (Gráfica-8) se observa que las curvas de mortalidad de los periodos 1970-75, 1975-80 y 1980-85 crecen, superando ligeramente la altura de las curvas de periodos anteriores, no sucediendo lo mismo con la de 1985-90, la cual es más congruente con la tendencia esperada según el patrón registrado en los años 1960-65 y 1965-70. Esta situación puede ser consecuencia de diversos factores, uno de ellos es, quizá, la escasa confiabilidad de los datos del censo de 1980.



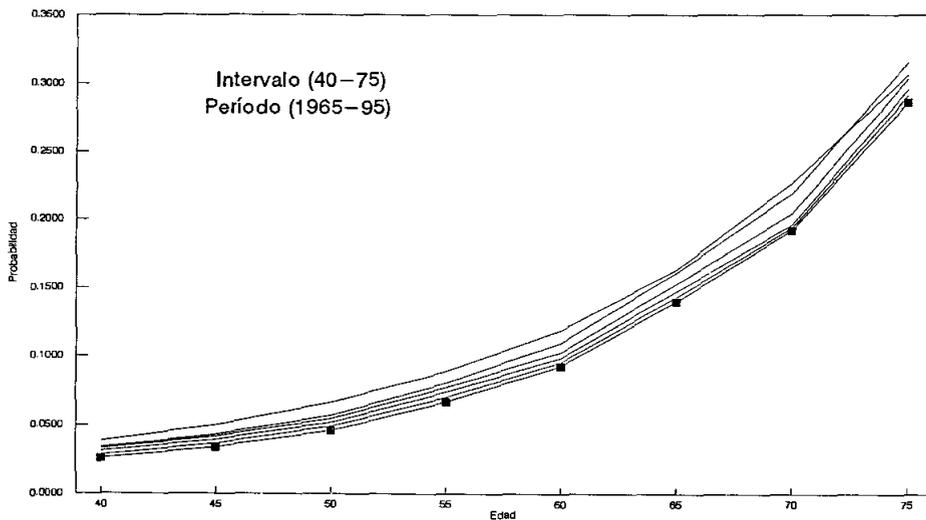
Comparando las curvas de mortalidad de los periodos 1965-90 con la de 1990-95 (Gráfica-9) es posible verificar que la curva 1990-95 asemeja la tendencia esperada en función del patrón de los años 1965-1970 y 1985-90.

En relación a las edades 40-80 (Gráfica-10), del período 1965-95, las curvas mantienen, en términos generales, cierta frecuencia de crecimiento entre sí, mientras que el crecimiento entre una edad y otra muestra algunas variaciones que las aleja, muy ligeramente, de la tendencia esperada en esas edades.

Gráfica-9



Gráfica-10

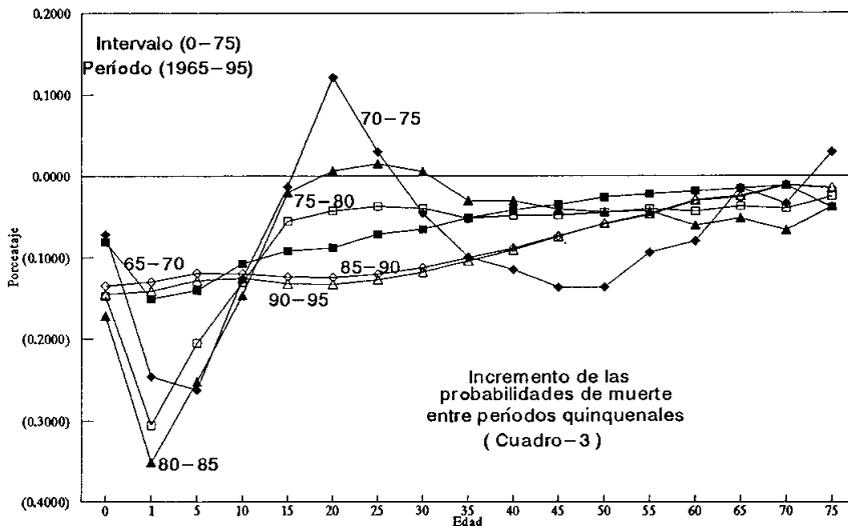


Al calcular y graficar el porcentaje de crecimiento entre periodos quinquenales (Cuadro-3 y Gráfica-11), se verifican las observaciones anteriores, es decir, existen variaciones fuertes en el incremento, o decremento, de la mortalidad de los periodos 1970-75, 1975-80, y 1980-85 en relación con los incrementos registrados en 1965-70, 1980-85 y 1990-95.

Cuadro-3 Incremento de la Mortalidad Períodos Quinquenales México (1965-95)

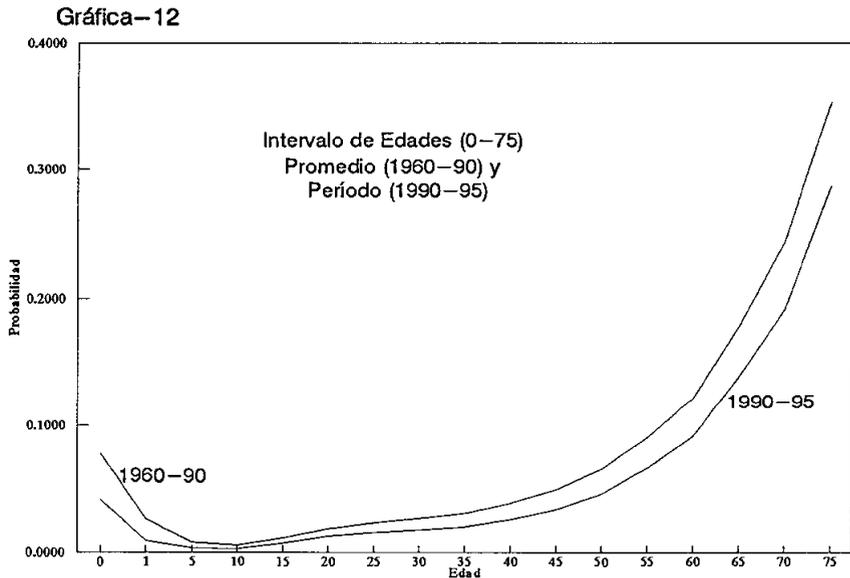
Edad	65-70	70-75	75-80	80-85	85-90	90-95
0	-8.13%	-7.19%	-17.16%	-14.78%	-13.45%	-14.48%
1	-15.08%	-24.59%	-35.07%	-30.53%	-13.05%	-14.09%
5	-14.06%	-26.26%	-25.22%	-20.51%	-11.94%	-12.83%
10	-10.75%	-12.65%	-14.66%	-13.09%	-12.00%	-12.57%
15	-9.21%	-1.31%	-2.00%	-5.53%	-12.44%	-13.26%
20	-8.83%	12.11%	0.63%	-4.29%	-12.51%	-13.29%
25	-7.17%	2.98%	1.47%	-3.74%	-12.05%	-12.82%
30	-6.54%	-4.60%	0.55%	-3.92%	-11.33%	-11.85%
35	-5.15%	-10.00%	-3.00%	-5.20%	-10.06%	-10.48%
40	-4.23%	-11.52%	-3.04%	-4.84%	-8.89%	-9.09%
45	-3.48%	-13.75%	-4.13%	-4.84%	-7.44%	-7.49%
50	-2.62%	-13.73%	-4.47%	-4.53%	-5.94%	-5.87%
55	-2.27%	-9.44%	-4.35%	-4.05%	-4.82%	-4.70%
60	-1.88%	-8.07%	-6.04%	-4.34%	-3.04%	-2.92%
65	-1.53%	-1.47%	-5.22%	-3.74%	-2.62%	-2.50%
70	-1.18%	-3.41%	-6.73%	-4.04%	-1.17%	-1.10%
75	-3.87%	2.87%	-3.82%	-2.57%	-1.55%	-1.46%
80	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

Gráfica-11



Finalmente, calculando el promedio aritmético de las probabilidades de muerte en el período 1960-1990 y comparando con las probabilidades de 1990-95 (Gráfica-12), se percibe, en términos generales, que la distancia entre una y otra curva es casi constante entre, aproximadamente, edades 0-5 y 40-80; la variabilidad de 5-40 es consecuencia de las irregularidades de los períodos quinquenales de 1970-85.

En conclusión, las marcadas irregularidades del período 1970-85, que quizá se deban a la escasa confiabilidad del censo de 1980 y que tal vez aportan cierto grado de irregularidad a la curva de 1990-95, no impiden utilizar la tabla abreviada 1990-95 para desarrollar el ejemplo. No obstante, no sucedería lo mismo si la tabla desplegada se requiere para cálculos específicos, porque entonces su utilización debe sustentarse en bases congruentes con el objetivo para el cual se elabora.



Reconstrucción de la Tabla Quinquenal.

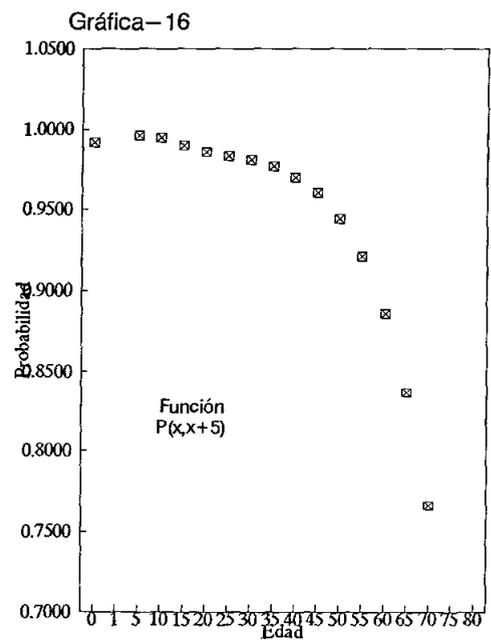
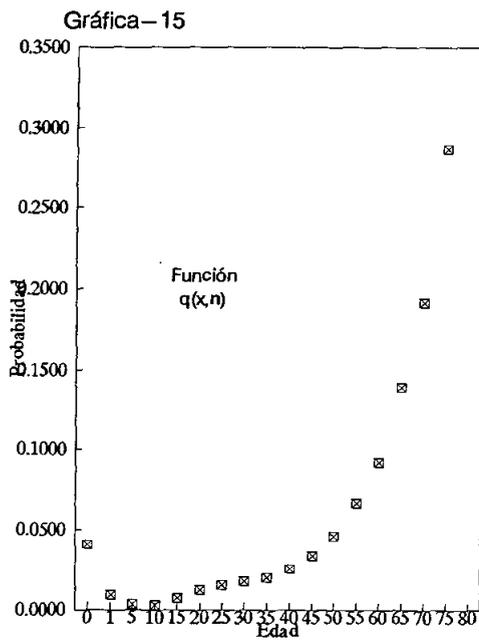
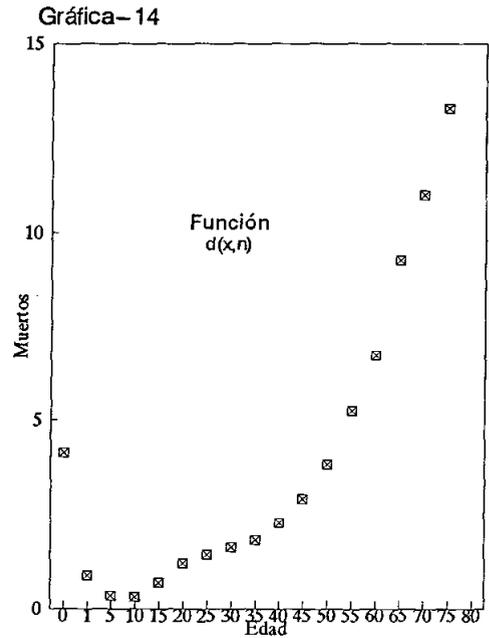
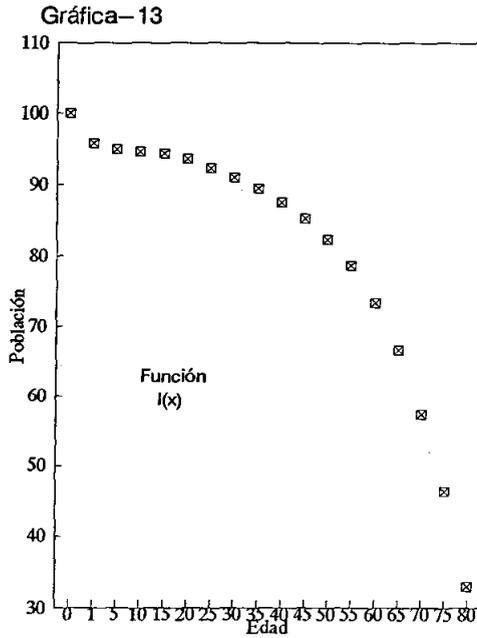
La reconstrucción de la tabla abreviada (Cuadro-4) se llevó a cabo tomando como base los valores de $q(x,n)$ de la tabla quinquenal, una raíz igual a 100,000 y un valor de w igual a 15. Los resultados fueron excelentes pues los valores estimados presentan un alto grado de aproximación respecto a los datos de la tabla original, las variaciones son mínimas y muy probablemente se deben a errores de aproximación.

En el marco de estas y anteriores observaciones se considera que la información de la tabla quinquenal a desplegar (Cuadro-1) es aceptable. Las tendencias de las diferentes funciones que la integran se ilustran en las gráficas 13 a 20.

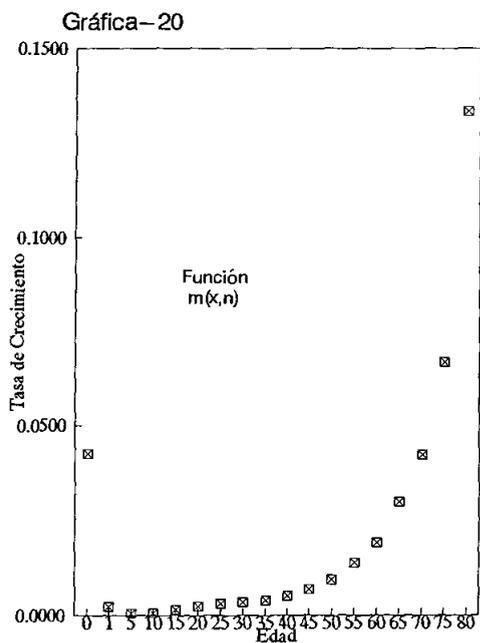
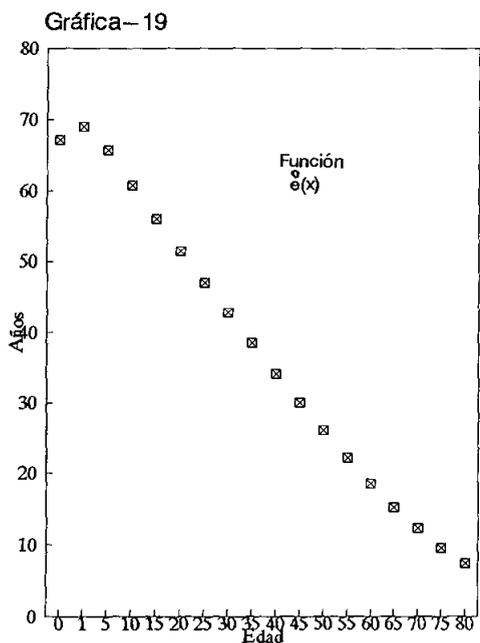
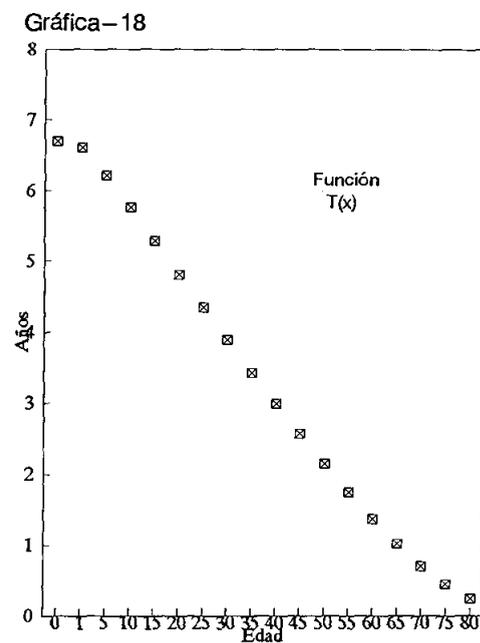
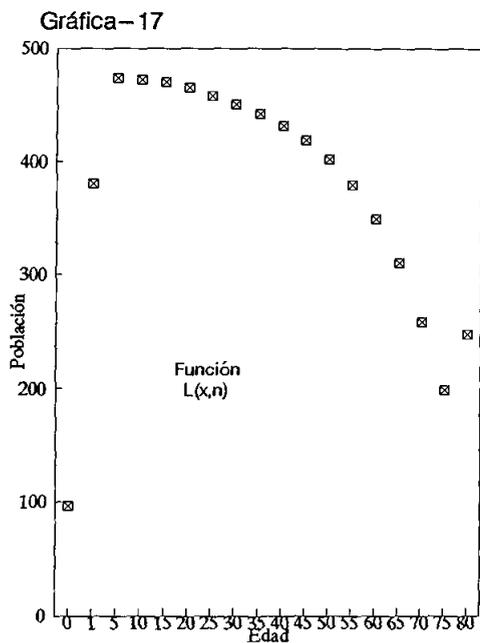
Cuadro-4 RECONSTRUCCION DE LA TABLA ABREVIADA Hombres México (1990-95)

Edad	n	$l(x)$	$d(x,n)$	$q(x,n)$	$P(x,n)$	$L(x,n)$	$T(x)$	$\hat{e}(x)$	$m(x,n)$
0	1	100,000	4,110	0.0411	0.9589	97,945	6,711,972	67.12	0.0420
1	4	95,890	895	0.0093	0.0000	381,771	6,614,027	68.98	0.0023
5	5	94,995	342	0.0036	0.9966	474,122	6,232,256	65.61	0.0007
10	5	94,653	310	0.0033	0.9947	472,493	5,758,134	60.83	0.0007
15	5	94,344	697	0.0074	0.9899	469,976	5,285,641	56.03	0.0015
20	5	93,647	1,203	0.0129	0.9857	465,225	4,815,665	51.42	0.0026
25	5	92,443	1,459	0.0158	0.9831	458,570	4,350,440	47.06	0.0032
30	5	90,985	1,638	0.0180	0.9809	450,828	3,891,871	42.78	0.0036
35	5	89,347	1,809	0.0203	0.9770	442,211	3,441,042	38.51	0.0041
40	5	87,538	2,266	0.0259	0.9702	432,022	2,998,831	34.26	0.0052
45	5	85,271	2,884	0.0338	0.9602	419,146	2,566,810	30.10	0.0069
50	5	82,387	3,795	0.0461	0.9439	402,450	2,147,663	26.07	0.0094
55	5	78,593	5,240	0.0667	0.9211	379,863	1,745,214	22.21	0.0138
60	5	73,353	6,748	0.0920	0.8855	349,895	1,365,350	18.61	0.0193
65	5	66,605	9,271	0.1392	0.8365	309,847	1,015,456	15.25	0.0299
70	5	57,334	10,995	0.1918	0.7658	259,181	705,609	12.31	0.0424
75	5	46,339	13,281	0.2866	0.0000	198,492	446,428	9.63	0.0669
80	w	33,058	33,058	1.0000	0.0000	247,936	247,936	7.50	0.0000

Gráficas de la Tabla Quinquenal de Mortalidad



Gráficas de la Tabla Quinquenal de Mortalidad



3.2 INTERVALO SUPERIOR (edades 0 - 4).

De la tabla abreviada (Cuadro-1) se tienen los siguientes datos:

x	n	l(x)	q(x,n)	d(x,n)
0	0	100,000	0.0411	4.110
1	4	95,890	0.0093	895
5	5	94,995	0.0036	342

En la columna de $d(x,n)$ se observa que el número de muertos entre las edades 0-1 es mucho más grande que el de los que mueren entre las edades 1-4, y que este a su vez es superior al doble de los que fallecen en el siguiente quinquenio. En otras palabras, el decremento de las probabilidades de muerte en el intervalo 0-4 es por demás acelerado, situación que implica un tratamiento especial para el intervalo. Asimilar un polinomio de segundo grado o utilizar un proceso de interpolación, por ejemplo, no conduciría a resultados congruentes con la tendencia real del fenómeno.

En caso de tener poca experiencia en el tema de la mortalidad y carecer de la estadística necesaria para elaborar un estudio especial que auxilie en la determinación de los valores de las primeras edades, una alternativa es considerar la experiencia implícita en una tabla de mortalidad por edades únicas previamente elaborada, siempre que las circunstancias permitan homologar el fenómeno. El proceso se inicia con la inspección de tablas de mortalidad por edad de diferentes períodos, tomando como referencia principal los valores de $q(0)$ y $q(1,4)$. En este caso, la base serán las tablas de vida para el área de la seguridad social 1900-2080 de los Estados Unidos de América, un país con amplia experiencia en el tema.

En dichas tablas se busca la probabilidad de muerte en edad cero, $q'(0)$, y la de edades 1-4, $q'(1,4)$, tales que su valor se aproxime a $q(0)$ y $q(1,4)$ de la tabla abreviada. En este caso, la tabla que se considera corresponde al año de 1940 y sus datos son¹:

x	$d'(x)$	$q'(x)$	$q'(x,4)$	$d'(x,4)$
0	4,163	0.041627		
1	479	0.005001	0.0107	1,028
2	245	0.002570		
3	168	0.001769		
4	136	0.001434		

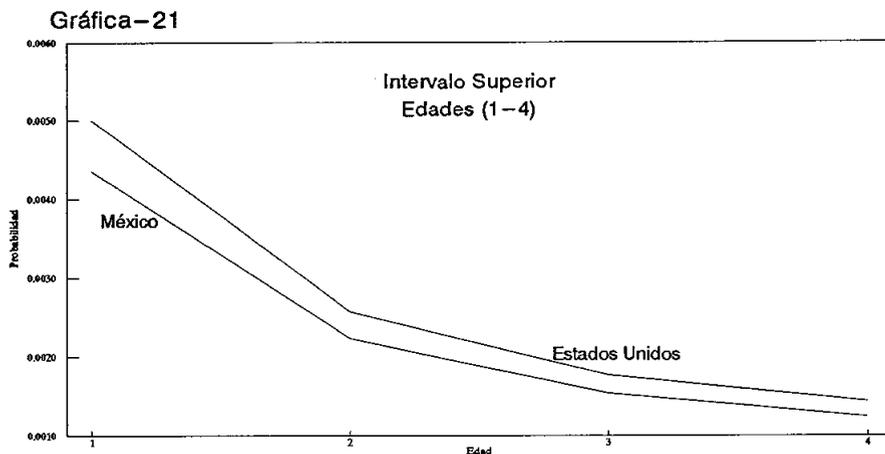
El siguiente paso es estimar los valores por edad del intervalo superior. Considérese que se busca reproducir la tendencia del fenómeno en Estados Unidos en el año de 1940, entonces, determinando el porcentaje de muertos que se asigna a cada edad y aplicándolo al total $d(1,4)$ se obtienen los valores de $d(x)$ en el intervalo :

x	$l(x)$	$q(x)$	$d(x)$	$q(x,4)$	$d(x,4)$
1	95,890	0.0043	417	0.0093	895
2	95,473	0.0022	213		
3	95,260	0.0015	146		
4	95,114	0.0012	118		

$$\text{Donde : } d(x) = \frac{d'(x)}{d'(1,4)} d(1,4)$$

¹ Información tomada del estudio actuarial No. 107, Felcite C. Bell, "Life Tables for the United States Social Security Area 1900-208D", pág. 24.

Finalmente, comparando la curva de mortalidad de Estados Unidos de 1940 con la estimada para México en el intervalo superior (Gráfica-21) se observa que se mantienen equidistantes una de otra, esto es, se ha imitado la tendencia del fenómeno en otro lugar y en otro tiempo.



Edad	Probabilidades de Muerte	
	Estados Unidos	México
1	0.005001	0.004347
2	0.002570	0.002233
3	0.001769	0.001535
4	0.001434	0.001244

3.3 INTERVALO CENTRAL (edades 5 - 79).

De la tabla abreviada se percibe que a edad 5 las probabilidades de muerte pierden en gran medida la caída acelerada del intervalo 0-4, que continúan con un decrecimiento menos rápido hasta edad 10 y luego toman una tendencia creciente y decreciente, muy suave, entre las edades 10 y 40 aproximadamente, para después crecer aceleradamente hasta edad 80. La descripción de esta tendencia y su representación en valores por edad se puede obtener utilizando los datos quinquenales y un método de interpolación adecuado. Sea el método elegido el de los multiplicadores de Beers, un método que además de aportar cierto grado de elementos de ajustamiento al considerar tanto los valores que presiden al intervalo sobre el que interpola como los que le siguen, también tiene la facultad de auxiliar en el tratamiento de los extremos a través de sus matrices para el primero, segundo, cuarto y quinto grupo.

En este caso, los multiplicadores de Beers¹ se aplicarán sobre la serie de la función $d(x,5)$ empleando cuatro de las cinco matrices. Se omite la primera, dado que además de no poder utilizarse para tratar el intervalo superior, por las características de la mortalidad en esas edades, tampoco se emplea en el intervalo 5-9, para el cual se toma como referencia el valor de un quinquenio anterior, $d(0,5)$; es decir, se consideran los valores quinquenales $d(x-5,5)$, $d(x,5)$, $d(x+5,5)$, $d(x+10,5)$ y $d(x+15,5)$ y por lo tanto, la matriz para el segundo grupo.

Por otra parte, al aplicar la matriz del segundo grupo para interpolar en 5-9, resulta que el valor real de $d(0,5)$ es una

¹ Anexo C, tabla C.4.

cantidad elevada de efectos inconvenientes si se toma como primer punto de referencia, por lo tanto, se supone, en un primer intento, que $d(0,5)$ asume el valor de 1000, cantidad que será susceptible al buscar la regularidad de crecimiento en la unión de las curvas de las edades 0-4 y 5-79.

Realizando la multiplicación de la segunda a la quinta matriz del método de Beers por los correspondientes datos quinquenales de la función $d(x)$ de la tabla abreviada, se obtiene la serie anual $d(x)$ para las edades 5-79 (Cuadro-5). Reagrupando los valores anuales en intervalos de cinco, $d'(x,5)$, se observa que es igual al total quinquenal de los datos, $d(x,5)$. En otras palabras, los valores desagregados conservan el total quinquenal del cual provienen:

$$d'(x,5) = d(x,5) = d(x) + d(x+1) + d(x+2) + d(x+3) + d(x+4)$$

La construcción de $L'(x,5)$ según la serie estimada $d(x)$ es inmediata :

Se sabe que :

$$L(x,5) = L(x) + L(x+1) + L(x+2) + L(x+3) + L(x+4)$$

demás,

$$L(x) = l(x) - .5d(x)$$

$$L(x,1) = l(x) - d(x) - .5d(x+1)$$

$$L(x,2) = l(x) - d(x) - d(x+1) - .5d(x+2)$$

$$L(x,3) = l(x) - d(x) - d(x+1) - d(x+2) - .5d(x+3)$$

$$L(x,4) = l(x) - d(x) - d(x+1) - d(x+2) - d(x+3) - .5d(x+4)$$

entonces,

$$L'(x,5) = 5l(x) - (.5) [9d(x) + 7d(x+1) + 5d(x+2) + 3d(x+3) + d(x+4)]$$

Cuadro-5

d(x,5)	X	d(x)	d'(x,5) L'(x-1,5)	l(x)	q(x)	d(x,5)	X	d(x)	d'(x,5) L'(x-1,5)	l(x)	q(x)
	0					1,638	40	410	2,266	87,538	0.0047
	1					1,809	41	432	432,236	87,127	0.0050
	2					2,266	42	453		86,695	0.0052
	3					2,884	43	475		86,242	0.0055
	4					3,795	44	496		85,768	0.0058
1,000	5	97	342	94,995	0.0010	1,809	45	520	2,884	85,271	0.0061
342	6	78	474,001	94,898	0.0008	2,266	46	547	419,438	84,751	0.0065
310	7	64		94,820	0.0007	2,884	47	575		84,204	0.0068
697	8	54		94,756	0.0006	3,795	48	605		83,629	0.0072
1,203	9	49		94,702	0.0005	5,240	49	637		83,024	0.0077
1,000	10	48	310	94,653	0.0005	2,266	50	671	3,795	82,387	0.0081
342	11	51	472,583	94,606	0.0005	2,884	51	707	402,929	81,717	0.0087
310	12	58		94,555	0.0006	3,795	52	751		81,009	0.0093
697	13	69		94,497	0.0007	5,240	53	803		80,258	0.0100
1,203	14	84		94,427	0.0009	6,748	54	862		79,455	0.0109
342	15	100	697	94,344	0.0011	2,884	55	927	5,240	78,593	0.0118
310	16	118	470,180	94,244	0.0013	3,795	56	993	380,436	77,665	0.0128
697	17	138		94,125	0.0015	5,240	57	1,055		76,672	0.0138
1,203	18	159		93,987	0.0017	6,748	58	1,108		75,617	0.0146
1,459	19	181		93,828	0.0019	9,271	59	1,157		74,509	0.0155
310	20	204	1,203	93,647	0.0022	3,795	60	1,203	6,748	73,353	0.0164
697	21	227	465,384	93,442	0.0024	5,240	61	1,256	350,733	72,150	0.0174
1,203	22	245		93,216	0.0026	6,748	62	1,328		70,894	0.0187
1,459	23	259		92,970	0.0028	9,271	63	1,424		69,567	0.0205
1,638	24	268		92,711	0.0029	10,995	64	1,538		68,143	0.0226
697	25	276	1,459	92,443	0.0030	5,240	65	1,660	9,271	66,605	0.0249
1,203	26	284	458,647	92,167	0.0031	6,748	66	1,777	310,713	64,945	0.0274
1,459	27	292		91,883	0.0032	9,271	67	1,877		63,168	0.0297
1,638	28	300		91,591	0.0033	10,995	68	1,951		61,291	0.0318
1,809	29	307		91,292	0.0034	13,281	69	2,007		59,340	0.0338
1,203	30	315	1,638	90,985	0.0035	5,240	70	2,058	10,995	57,334	0.0359
1,459	31	322	450,885	90,669	0.0036	6,748	71	2,115	259,952	55,276	0.0383
1,638	32	329		90,347	0.0036	9,271	72	2,186		53,160	0.0411
1,809	33	334		90,018	0.0037	10,995	73	2,270		50,975	0.0445
2,266	34	338		89,685	0.0038	13,281	74	2,366		48,705	0.0486
1,459	35	342	1,809	89,347	0.0038	5,240	75	2,468	13,281	46,339	0.0533
1,638	36	348	442,330	89,005	0.0039	6,748	76	2,570	199,383	43,871	0.0586
1,809	37	357		88,657	0.0040	9,271	77	2,667		41,301	0.0646
2,266	38	372		88,299	0.0042	10,995	78	2,753		38,633	0.0713
2,884	39	390		87,927	0.0044	13,281	79	2,822		35,880	0.0786
							80			33,058	

Naturalmente que la nueva serie $L'(x,5)$ presenta sobreestimaciones o subestimaciones respecto a la serie original, esto ya se esperaba, puesto que se tiene mayor grado de exactitud cuando el factor f_x^1 que interviene en su cálculo se aproxima para períodos de un año que cuando se hace para períodos de cinco.

El vector de las probabilidades de muerte, por su parte, se obtiene con la aplicación de las expresiones siguientes :

$$l_{(x+1)} = l_{(x)}(1-q_{(x)}) \quad \text{y} \quad q_{(x)} = \frac{d_{(x)}}{l_{(x)}}$$

Nota:

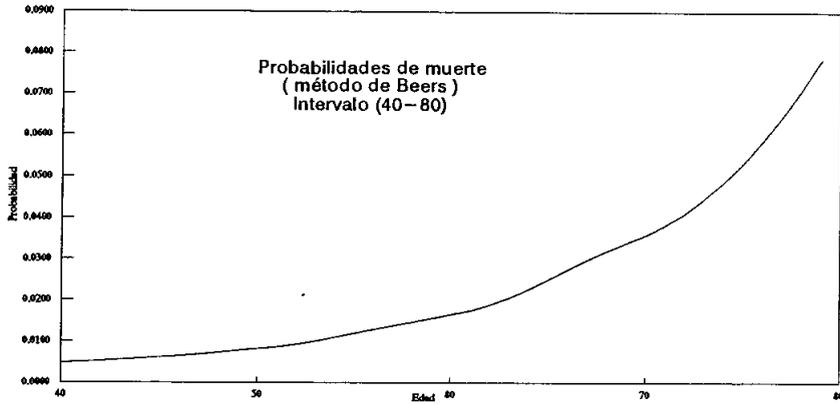
El valor de $l(6)$ se obtiene a partir del dato conocido $l(5)$.

La nueva serie $q_{(x)}$ permite conservar la proximidad respecto a los datos originales, al aplicarla sobre una raíz igual a 100,000 y luego obtener el total de muertes en cada quinquenio, estos son iguales a sus homólogos en la tabla quinquenal. La observación se reafirma al estimar los valores de $l_{(x)}$ quinquenal y comprobar que son los mismos de la tabla abreviada.

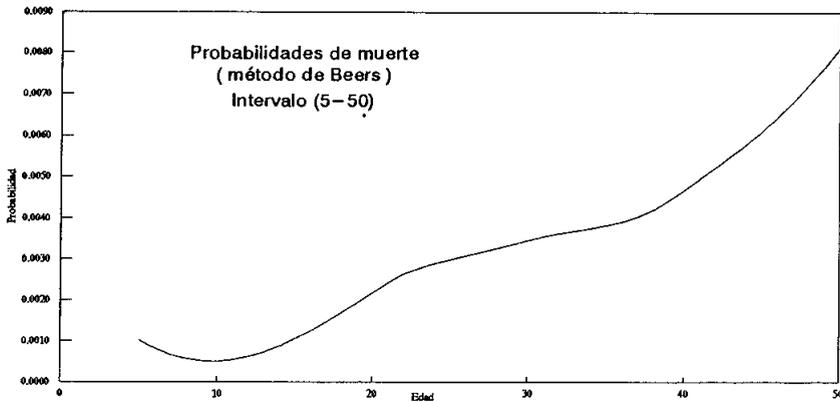
La situación es diferente con la suavidad; de la curva de probabilidades se perciben después de aproximadamente edad 50 ligeras curvaturas (Gráfica-22) que, bajo el supuesto de que a partir de aproximadamente edad 40 la tasa de crecimiento de la mortalidad se incrementa hasta el final de la tabla, no deben existir. Evidenciando por lo tanto una falta de regularidad en la tasa de crecimiento entre quinquenios. Las variaciones son más claras observando la gráfica del valor absoluto de las segundas diferencias (Gráfica-24), la cual muestra los saltos

¹ $L(x,n) = nl_{(x)} - f_x d_{(x,n)}$

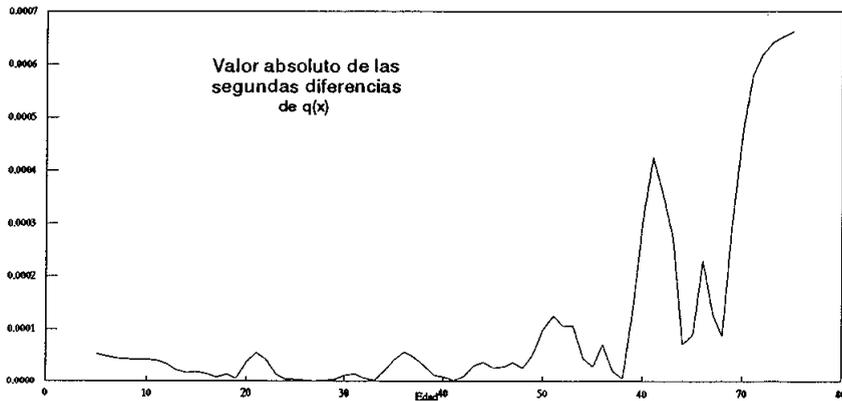
Gráfica-22



Gráfica-23



Gráfica-24



más pronunciados a partir de esa edad. Sin embargo, el grado de irregularidad no es drástico e, incluso, la curva puede quedar así. Otra alternativa es adicionar elementos de suavizamiento, para evitar que las variaciones, aunque no graves, permanezcan en la tabla por edad.

La curva del intervalo 5-50 por su parte, aun cuando no tiene perfectamente delineada la concavidad característica de las edades medianas, presenta un grado de irregularidad mínimo, así lo muestra la gráfica de las segundas diferencias (Gráfica 24) y la gráfica del intervalo (Gráfica-23) .

En términos generales se puede decir que la proximidad respecto a los datos originales, dada por la interpolación a través del método de Beers, es buena en todo el intervalo. La suavidad en cambio se ve afectada ligeramente en ciertas edades, principalmente después de la edad 50.

En el marco de estas observaciones se debe considerar la posibilidad de tomar la serie resultante o, en su defecto reemplazar, toda o una parte de ella, por otra más suave. En este caso, se buscará disminuir la irregularidad del intervalo 50-80 sustituyendo la serie de ese intervalo por una más suave, que se determinará utilizando una curva *Gompertz*.

La función *Gompertz*, al igual que la de *Gompertz-Makeham*, es una de las hipótesis de mortalidad frecuentemente usadas para describir la tendencia de las probabilidades después de edad 40 y hasta edad 90, por lo menos. Su base de aplicación, en este ejemplo, serán los valores de $q(x,5)$, de ellos se obtendrá $p(40,10)$, $p(50,10)$, $p(60,10)$ y $p(70,10)$ para el cálculo de las constantes¹. Con los dos primeros se ajusta la curva del intervalo 40-60 y con los dos restantes la de 60-80, ambas unidas en su punto común, edad 60 (Cuadro-6). Otra alternativa

1 Las bases de procedimiento se explican en las págs. 49 y 50.

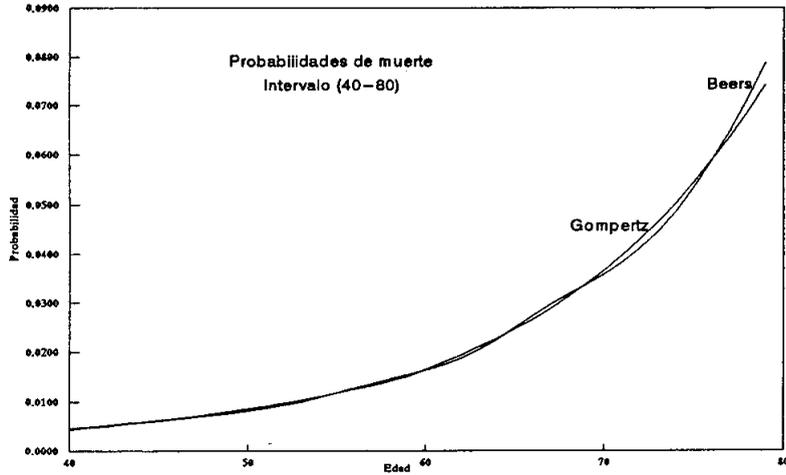
es, sin duda, realizar un sólo ajuste desde edad 40 y hasta edad 80, sin embargo se prefirió tomar una serie con una ligera variación en edad 60 y una proximidad con $d(x,10)$ ¹ en cuatro puntos, que otra sin ninguna irregularidad en el incremento de la tasa de mortalidad y una proximidad en sólo dos puntos. Además, en el primer caso el fenómeno se describe perfectamente y el grado de suavidad mejora de forma considerable, corrigiendo irregularidades de la serie original (Gráfica-25 y Gráfica-26).

La nueva serie del intervalo central se integra combinando los valores interpolados con el método de Beers en las edades 5-49 más los ajustados para 50-80 utilizando *Gompertz*, en cuyo caso las terceras diferencias de $q(x)$ muestran dos cambios bruscos (Gráfica-27), el primero en las edades 49-50, donde se unen la curva interpolada de Beers con la ajustada de *Gompertz*; y el segundo en las edades 59-60, enlace entre las dos curvas ajustadas con *Gompertz*. En ambos casos las variaciones serán corregidas cuando se realice la unión de intervalos para todo el rango de vida.

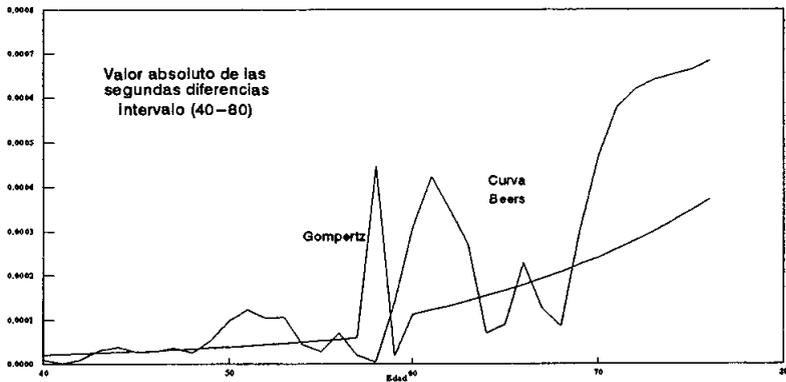
Otra forma de proceder consiste en tomar como serie del intervalo central la que se obtiene directamente después de interpolar con el método de Beers, y no utilizar la función *Gompertz*. En ese caso, las variaciones presentes en el intervalo 50-80 se mantendrían en la tabla por edad, no obstante, se tendría la ventaja de que la proximidad respecto a los valores $d(x,5)$ de la tabla original se conservaría en todos los puntos.

¹ $d(x,10) = d(x,5) + d(x+5,5)$

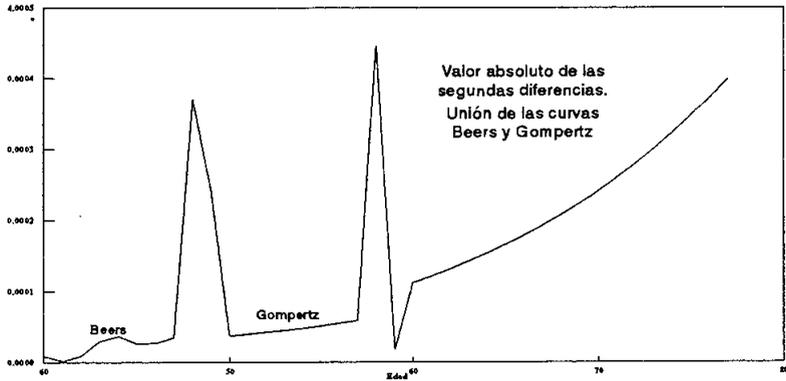
Gráfica-25



Gráfica-26



Gráfica-27



3.4 INTERVALO INFERIOR (edades 80 - W).

La escasez de información estadística en las edades avanzadas ha impedido conocer con toda la precisión deseada la tendencia de la mortalidad en este intervalo, de tal forma que se hace indispensable el uso de alguna hipótesis de mortalidad, las más usadas son la de *Gompertz*, *Gompertz-Makeham* y muy recientemente, la *Gompertz Modificada*.

En este ejemplo, se asume que la mortalidad se comporta como lo sugiere la hipótesis *Gompertz Modificada*, para ello se ajusta una curva *Gompertz* en las edades 60-80 y después, tomándola como base se hace variar x hasta alcanzar la extinción de la población, obteniendo así los valores extrapolados correspondientes al intervalo 80-w. En un segundo paso, se aplica un factor igual a 0.90 con el cual se decrementa progresivamente la tasa de crecimiento de la mortalidad después de edad 90 y se aproxima la esperanza de vida a edad 80 y el valor de $L(80,w)$ de la tabla abreviada, es decir, si j_x es la tasa a la que crece $q(x)$ respecto a $q(x-1)$, entonces :

$$q(90) = q(89)(1+j_{90}(0.90)^0)$$

$$q(91) = q(90)(1+j_{91}(0.90)^1)$$

$$q(w) = q(w-1)(1+j_w(0.90)^{w-90})$$

Los resultados de aplicar este procedimiento se encuentran en el Cuadro-7, la columna tres muestra la tasa de crecimiento registrada para cada edad al extrapolar con la curva *Gompertz*, y la cuarta los valores finales de $q(x)$, determinados utilizando las tasas de la columna tres con un decremento del 90% después de edad 90 (Columna-5).

Cuadro-7

INTERVALO INFERIOR						
Edad	Extrapolación Gompertz		Gompertz Modificada			
	q(x)	Tasa de Crecimiento de q(x)	q(x)	Tasa de Crecimiento de q(x)	l(x)	d(x)
80	0.08006		0.080059		33,058	2,647
81	0.08646	8.001%	0.086465	8.001%	30,411	2,630
82	0.09336	7.970%	0.093356	7.970%	27,782	2,594
83	0.10077	7.937%	0.100766	7.937%	25,188	2,538
84	0.10873	7.901%	0.108728	7.901%	22,650	2,463
85	0.11728	7.863%	0.117277	7.863%	20,187	2,368
86	0.12645	7.821%	0.126449	7.821%	17,820	2,253
87	0.13628	7.776%	0.136282	7.776%	15,567	2,121
88	0.14681	7.727%	0.146813	7.727%	13,445	1,974
89	0.15808	7.675%	0.158081	7.675%	11,471	1,813
90	0.17012	7.619%	0.170124	7.619%	9,658	1,643
91	0.18298	7.558%	0.181696	6.802%	8,015	1,456
92	0.19669	7.492%	0.194086	6.819%	6,559	1,273
93	0.21129	7.422%	0.207333	6.825%	5,286	1,096
94	0.22681	7.346%	0.221472	6.819%	4,190	928
95	0.24328	7.264%	0.236538	6.803%	3,262	772
96	0.26074	7.176%	0.252563	6.775%	2,490	629
97	0.27921	7.082%	0.269576	6.736%	1,861	502
98	0.29870	6.981%	0.287600	6.686%	1,360	391
99	0.31923	6.873%	0.306655	6.625%	969	297
100	0.34080	6.757%	0.326752	6.554%	672	219
101	0.36341	6.633%	0.347895	6.471%	452	157
102	0.38703	6.501%	0.370079	6.377%	295	109
103	0.41164	6.360%	0.393287	6.271%	186	73
104	0.43720	6.209%	0.417492	6.154%	113	47
105	0.46365	6.049%	0.442649	6.026%	66	29
106	0.49091	5.880%	0.468703	5.886%	37	17
107	0.51889	5.700%	0.495579	5.734%	19	10
108	0.54748	5.510%	0.523184	5.570%	10	5
109	0.57655	5.310%	0.551410	5.395%	5	3
110	0.60595	5.099%	0.580127	5.208%	2	1
111	0.63551	4.878%	0.609186	5.009%	1	1
112	0.66505	4.648%	0.638420	4.799%	0	0
113	0.69436	4.408%	0.667646	4.578%	0	0
114	0.72324	4.159%	0.696665	4.347%	0	0
115	0.75147	3.902%	0.725267	4.105%	0	0
116	0.77881	3.639%	0.753232	3.856%	0	0
117	0.80506	3.371%	0.780339	3.599%	0	0
118	0.83000	3.098%	0.806368	3.336%	0	0
119	0.85345	2.824%	0.831109	3.068%	0	0
120						

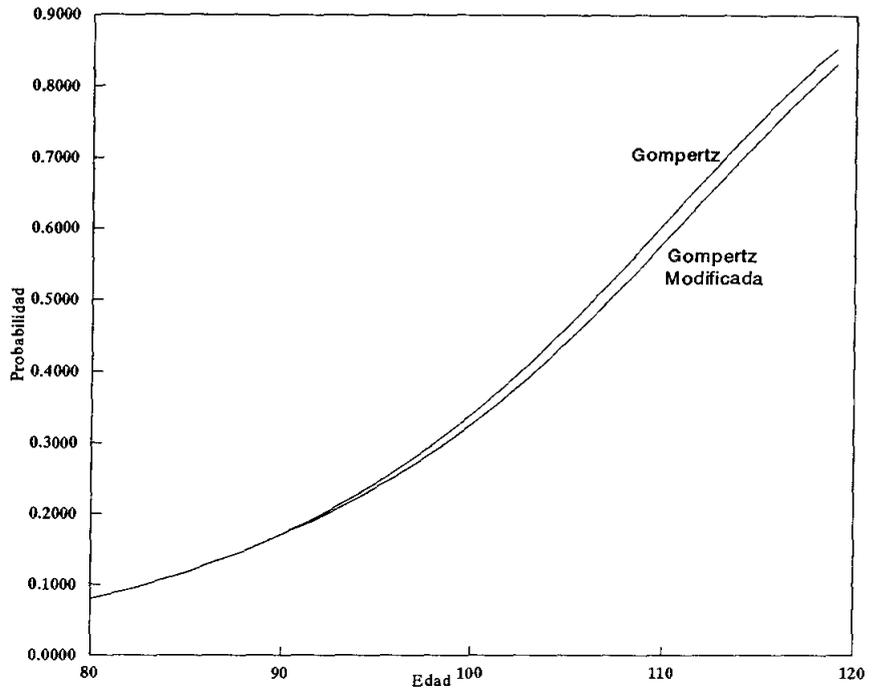
L(80,w) :
246,556
e(80) :
7.46

Al graficar, tanto la curva que se define al extrapolar unicamente con la función *Gompertz* como la que se tiene al modificar la tasa de crecimiento (Gráfica-28), se observa que la última se desfasa un poco respecto a la primera y produce por lo tanto un incremento en la esperanza de vida.

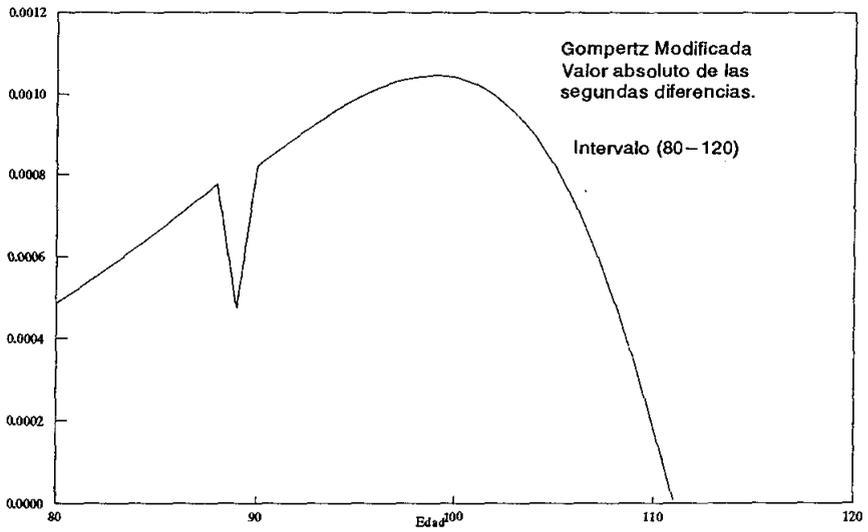
Algunos investigadores consideran que es suficiente con aplicar la hipótesis *Gompertz* hasta extinguir la población muy cerca de edad 100, otros en cambio, piensan que no se debe predefinir la edad de extinción¹, sino al contrario, se debe permitir que las probabilidades fluyan libremente, ya sea en función de la hipótesis *Gompertz*, *Gompertz-Makeham* o *Gompertz Modificada*, hasta que por si mismas extingan la población total. En este caso en particular, cuando se hizo la reconstrucción de la tabla quinquenal al inicio del capítulo, se observó que el valor de w era igual a 95, sin embargo siguiendo el criterio anterior, w llegó a ser igual a 112, aproximándose al mismo tiempo la esperanza de vida a edad 80 y el valor de $L(80, w)$ de la tabla quinquenal. En otras palabras, se consideró una forma específica de terminación de las probabilidades de muerte. En general, la decisión respecto al criterio que se debe seguir para obtener la edad de extinción y la forma de terminación de la curva de probabilidades depende de la experiencia y factores considerados por quien realiza el desplegado.

Otro aspecto importante es, sin duda, el grado de suavidad que presenta la curva extrapolada $80-w$, la cual, como ya se esperaba, registra un cambio brusco en la regularidad de crecimiento de las edades 90-91, producido al aplicar el factor de decremento a partir de la edad 90. La variación es aún más clara analizando la regularidad existente entre una edad y otra en el cálculo del valor absoluto de las segundas diferencias y su gráfica respectiva (Gráfica-29).

Gráfica-28



Gráfica-29



3.5 UNION DE INTERVALOS.

Una vez que se han obtenido los valores que corresponden a cada uno de los de los intervalos en los que se ha subdividido el rango de vida, se integra con ellos una serie que describe la tendencia de las probabilidades de muerte en las edades 0-112 (Cuadro-8). La gráfica de estas probabilidades muestra una curva suave para casi todo el rango de vida, las variaciones se observan en las edades 49-50 y 59-60 (Gráfica-30 y Gráfica-31). La apreciación es semejante cuando se calcula el valor absoluto de las segundas diferencias y se detecta la existencia de ciertos cambios bruscos, tanto en las edades en las que se unen las curvas de los diferentes intervalos como donde se comienza a decrementar la tasa de crecimiento de la mortalidad (Gráfica-32). El primero es el que se tiene al unir las curvas de las edades 0-4 y 5-79, para disminuirlo se desarrolla un proceso que consiste en hacer variar el valor hipotético de $d_{(0,5)}$, supuesto igual a 1000 cuando se trabajó con el intervalo central, y al mismo tiempo recalcular los valores interpolados en las edades 5-9 y 10-14 a través de las matrices para el segundo y tercer grupo del método de Beers, interrumpiendo el proceso sólo cuando se haya obtenido la suavidad deseada; en este caso fué con $d_{(0,5)}=990$.

Las variaciones entre 49-50 y 60-61 se disminuyen con otra aplicación de la tercera matriz del método de Beers, para ello se determina, según la nueva serie integrada para todo el rango de vida, el número de muertos en cada quinquenio, $d'_{(x,5)}$; luego se recalculan los valores de $d_{(x)}$, de edad 15 a edad 64, multiplicando la tercera matriz por los vectores con elementos $d'_{(x,5)}$ correspondientes.

En lo que se refiere al cambio brusco de las edades 90-91, se sabe que es el resultado de modificar, después de edad 90, la

Cuadro-8

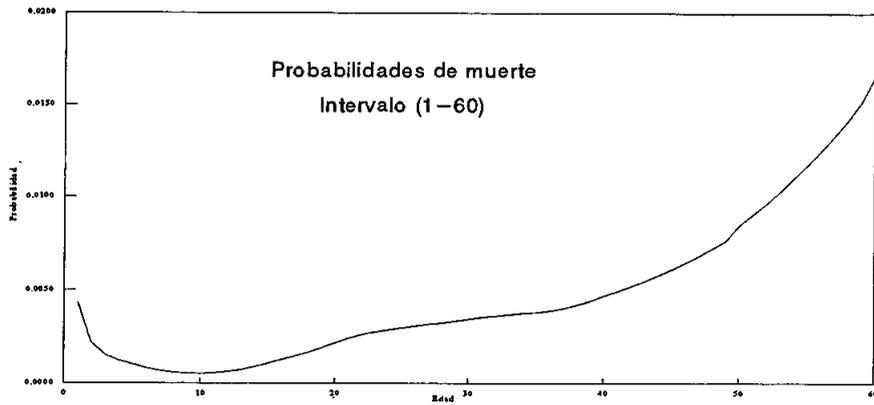
Unión de intervalos (0-4), (5-49), (50-79), (80,89) y (90-112)									
Edad	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$	Tasa de Crecimiento	Edad	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$	Tasa de Crecimiento
0	100,000	4,110	0.0411		30	90,985	315	0.0035	2.89%
1	95,890	417	0.0043	-89.42%	31	90,669	322	0.0036	2.70%
2	95,473	213	0.0022	-48.70%	32	90,347	329	0.0036	2.31%
3	95,260	146	0.0015	-31.30%	33	90,018	334	0.0037	1.85%
4	95,114	118	0.0012	-19.05%	34	89,685	338	0.0038	1.67%
5	94,995	97	0.0010	-17.69%	35	89,347	342	0.0038	1.62%
6	94,898	78	0.0008	-19.67%	36	89,005	348	0.0039	2.11%
7	94,820	64	0.0007	-18.01%	37	88,657	357	0.0040	3.13%
8	94,757	54	0.0006	-14.81%	38	88,299	372	0.0042	4.42%
9	94,702	49	0.0005	-9.56%	39	87,927	390	0.0044	5.33%
10	94,653	48	0.0005	-2.23%	40	87,538	410	0.0047	5.73%
11	94,605	51	0.0005	6.23%	41	87,127	432	0.0050	5.66%
12	94,554	58	0.0006	13.99%	42	86,695	453	0.0052	5.52%
13	94,496	69	0.0007	19.19%	43	86,242	475	0.0055	5.26%
14	94,427	84	0.0009	20.97%	44	85,768	496	0.0058	5.15%
15	94,344	100	0.0011	19.95%	45	85,271	520	0.0061	5.42%
16	94,244	118	0.0013	18.27%	46	84,751	547	0.0065	5.75%
17	94,125	138	0.0015	16.96%	47	84,204	575	0.0068	5.84%
18	93,987	159	0.0017	15.54%	48	83,629	605	0.0072	5.93%
19	93,828	181	0.0019	13.92%	49	83,024	637	0.0077	6.09%
20	93,647	204	0.0022	12.95%	50	82,387	699	0.0085	10.56%
21	93,442	227	0.0024	11.20%	51	81,688	739	0.0091	6.69%
22	93,216	245	0.0026	8.49%	52	80,949	782	0.0097	6.68%
23	92,970	259	0.0028	5.73%	53	80,167	826	0.0103	6.68%
24	92,711	268	0.0029	3.89%	54	79,341	872	0.0110	6.68%
25	92,443	276	0.0030	3.25%	55	78,470	920	0.0117	6.68%
26	92,167	284	0.0031	3.26%	56	77,550	970	0.0125	6.67%
27	91,883	292	0.0032	3.03%	57	76,580	1,022	0.0133	6.67%
28	91,591	300	0.0033	2.97%	58	75,558	1,075	0.0142	6.67%
29	91,292	307	0.0034	2.90%	59	74,483	1,130	0.0152	6.66%

TABLAS DE MORTALIDAD

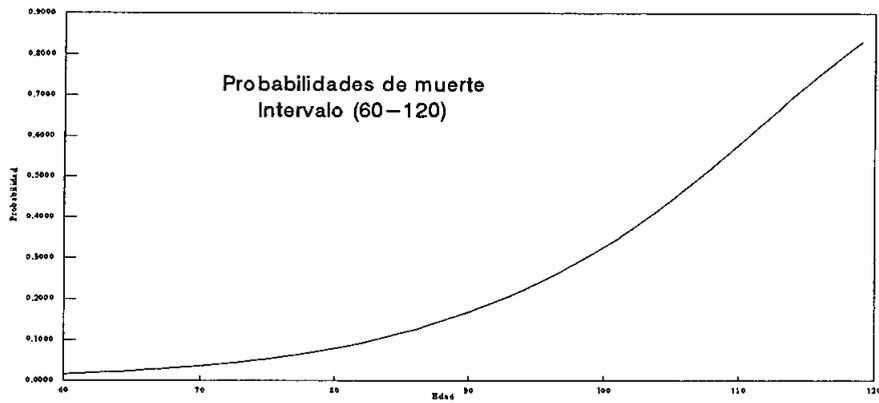
Cuadro-8

Unión de intervalos (0-4), (5-49), (50-79), (80,89) y (90-112)									
Edad	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$	Tasa de Crecimiento	Edad	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$	Tasa de Crecimiento
60	73,353	1,215	0.0166	9.18%	91	8,015	1,456	0.1817	6.80%
61	72,137	1,295	0.0179	8.30%	92	6,559	1,273	0.1941	6.82%
62	70,843	1,377	0.0194	8.29%	93	5,286	1,096	0.2073	6.83%
63	69,466	1,462	0.0210	8.28%	94	4,190	928	0.2215	6.82%
64	68,004	1,549	0.0228	8.28%	95	3,262	772	0.2365	6.80%
65	66,455	1,639	0.0247	8.27%	96	2,490	629	0.2526	6.77%
66	64,815	1,731	0.0267	8.26%	97	1,861	502	0.2696	6.74%
67	63,084	1,824	0.0289	8.25%	98	1,360	391	0.2876	6.69%
68	61,261	1,917	0.0313	8.24%	99	969	297	0.3067	6.63%
69	59,344	2,010	0.0339	8.23%	100	672	219	0.3268	6.55%
70	57,334	2,101	0.0367	8.22%	101	452	157	0.3479	6.47%
71	55,232	2,190	0.0397	8.21%	102	295	109	0.3701	6.38%
72	53,042	2,276	0.0429	8.19%	103	186	73	0.3933	6.27%
73	50,766	2,356	0.0464	8.18%	104	113	47	0.4175	6.15%
74	48,410	2,430	0.0502	8.16%	105	66	29	0.4426	6.03%
75	45,979	2,496	0.0543	8.14%	106	37	17	0.4687	5.89%
76	43,483	2,552	0.0587	8.12%	107	19	10	0.4956	5.73%
77	40,930	2,597	0.0635	8.10%	108	10	5	0.5232	5.57%
78	38,333	2,629	0.0686	8.08%	109	5	3	0.5514	5.40%
79	35,704	2,646	0.0741	8.06%	110	2	1	0.5801	5.21%
80	33,058	2,647	0.0801	8.03%	111	1	1	0.6092	5.01%
81	30,411	2,630	0.0865	8.00%	112	0	0	0.6384	4.80%
82	27,782	2,594	0.0934	7.97%	113	0	0	0.6676	4.58%
83	25,188	2,538	0.1008	7.94%	114	0	0	0.6967	4.35%
84	22,650	2,463	0.1087	7.90%	115	0	0	0.7253	4.11%
85	20,188	2,368	0.1173	7.86%	116	0	0	0.7532	3.86%
86	17,820	2,253	0.1264	7.82%	117	0	0	0.7803	3.60%
87	15,567	2,121	0.1363	7.78%	118	0	0	0.8064	3.34%
88	13,445	1,974	0.1468	7.73%	119	0	0	0.8311	3.07%
89	11,471	1,813	0.1581	7.68%	120	0	0	0	
90	9,658	1,643	0.1701	7.62%					

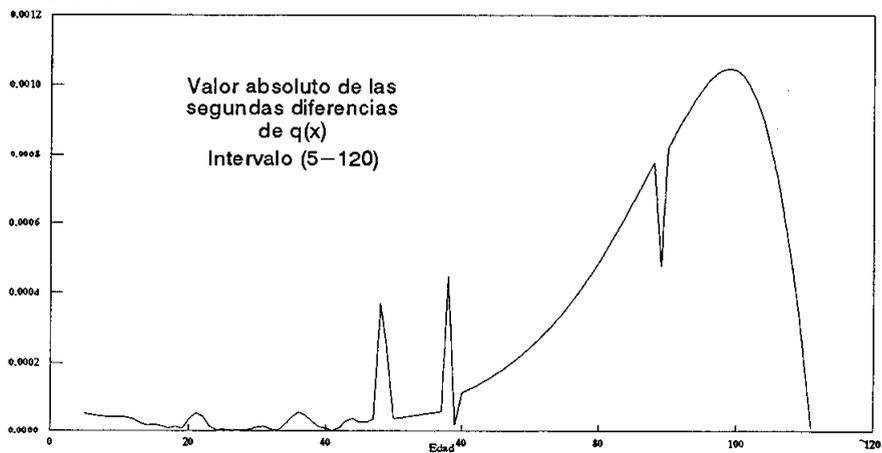
Gráfica-30



Gráfica-31



Gráfica-32



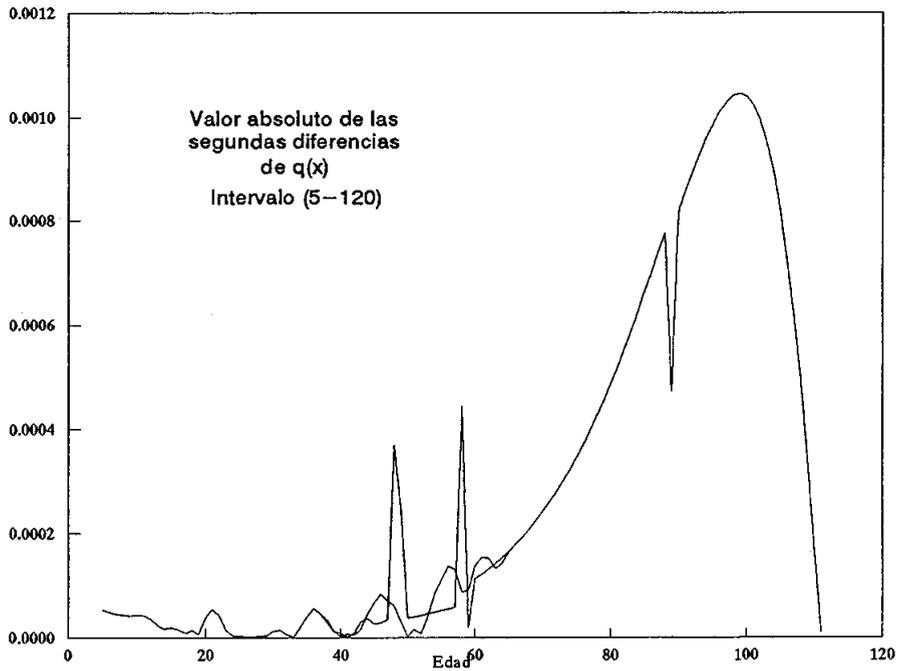
regularidad de crecimiento de la curva *Gompertz* con la que previamente se extrapoló en las edades avanzadas. Sin embargo, obsérvese que después de esa variación la curva vuelve a ser suave hasta el final de la tabla. En una primera instancia, se puede optar por disminuir tal variación, aplicando convenientemente un método específico. Sin embargo, en este ejemplo se decidió considerar los datos sin modificación, ya que en primer lugar, la irregularidad es mínima y en segundo término disminuirla implica modificar los valores circundantes, aún cuando minimamente, anexando pequeñas irregularidades donde no existen.

Una vez disminuidas las irregularidades presentes en las edades donde hay unión de curvas se obtiene la serie final de $q(x)$, la cual a incrementado su grado de suavidad, para ilustrarlo se muestra, en la gráfica 33, el valor absoluto de las segundas diferencias de la $q(x)$ final respecto al valor absoluto de las segundas diferencias de la $q(x)$ resultante de la simple unión de intervalos.

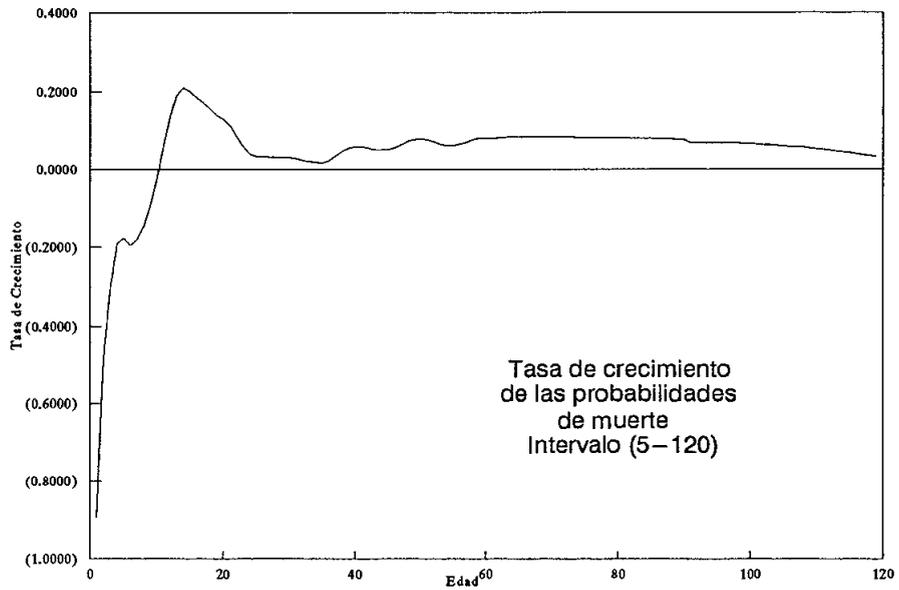
Los valores de la serie final de probabilidades de muerte, con los cuales se elaborará la tabla por edad, se encuentran en el cuadro-9, y la descripción de su tendencia en diferentes tramos del rango de vida se ilustra en las gráficas 36, 37 y 38.

Otro aspecto importante a considerar es el hecho de que en el desarrollo de este ejemplo se tomó como base la aplicación de un método de interpolación, por lo que el grado de proximidad respecto a los datos originales no ha sido afectado fuera de las edades 50-80, intervalo en el que se ajustó la función *Gompertz* con el objeto de incrementar suavidad.

Gráfica-33



Gráfica-34



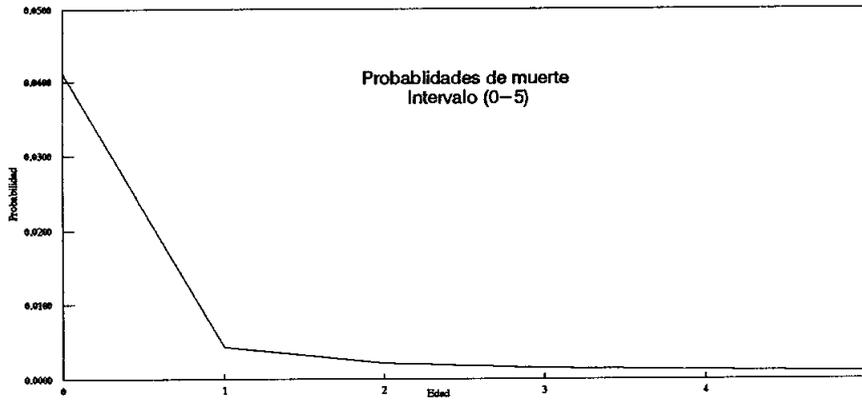
Cuadro-9

Resultados Finales de $q(x)$									
Edad	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$	Tasa de Crecimiento	Edad	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$	Tasa de Crecimiento
0	100,000	4,110	0.0411		30	90,985	315	0.0035	2.89%
1	95,890	417	0.0043	-89.42%	31	90,669	322	0.0036	2.70%
2	95,473	213	0.0022	-48.70%	32	90,347	329	0.0036	2.31%
3	95,260	146	0.0015	-31.30%	33	90,018	334	0.0037	1.85%
4	95,114	118	0.0012	-19.05%	34	89,685	338	0.0038	1.67%
5	94,995	97	0.0010	-17.69%	35	89,347	342	0.0038	1.62%
6	94,898	78	0.0008	-19.67%	36	89,005	348	0.0039	2.11%
7	94,820	64	0.0007	-18.01%	37	88,657	357	0.0040	3.13%
8	94,757	54	0.0006	-14.81%	38	88,299	372	0.0042	4.42%
9	94,702	49	0.0005	-9.56%	39	87,927	390	0.0044	5.33%
10	94,653	48	0.0005	-2.23%	40	87,538	411	0.0047	5.81%
11	94,605	51	0.0005	6.23%	41	87,127	432	0.0050	5.76%
12	94,554	58	0.0006	13.99%	42	86,694	454	0.0052	5.49%
13	94,496	69	0.0007	19.19%	43	86,240	474	0.0055	5.06%
14	94,427	84	0.0009	20.97%	44	85,766	495	0.0058	4.90%
15	94,344	100	0.0011	19.95%	45	85,271	516	0.0061	4.95%
16	94,244	118	0.0013	18.27%	46	84,755	541	0.0064	5.43%
17	94,125	138	0.0015	16.96%	47	84,214	571	0.0068	6.20%
18	93,987	159	0.0017	15.54%	48	83,643	607	0.0073	7.07%
19	93,828	181	0.0019	13.92%	49	83,036	648	0.0078	7.58%
20	93,647	204	0.0022	12.95%	50	82,387	694	0.0084	7.82%
21	93,442	227	0.0024	11.20%	51	81,693	740	0.0091	7.61%
22	93,216	245	0.0026	8.49%	52	80,953	786	0.0097	7.09%
23	92,970	259	0.0028	5.73%	53	80,167	828	0.0103	6.46%
24	92,711	268	0.0029	3.89%	54	79,339	870	0.0110	6.14%
25	92,443	276	0.0030	3.25%	55	78,469	913	0.0116	6.15%
26	92,167	284	0.0031	3.26%	56	77,556	961	0.0124	6.52%
27	91,883	292	0.0032	3.03%	57	76,594	1,016	0.0133	7.01%
28	91,591	300	0.0033	2.97%	58	75,578	1,079	0.0143	7.59%
29	91,292	307	0.0034	2.90%	59	74,500	1,148	0.0154	7.96%

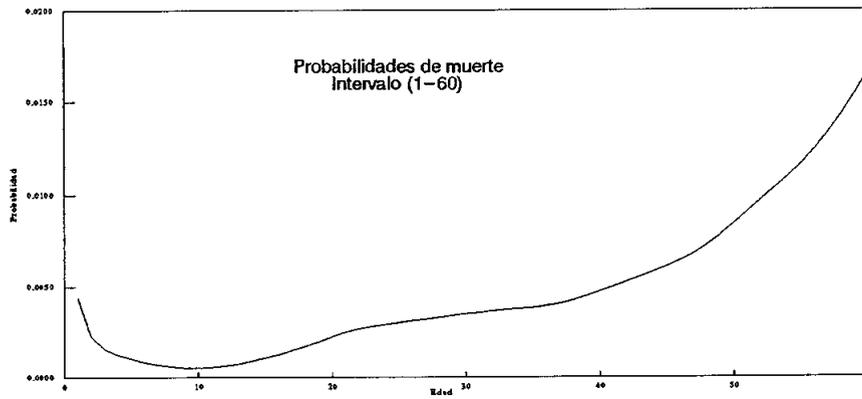
Cuadro-9

Resultados Finales de $q(x)$									
Edad	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$	Tasa de Crecimiento	Edad	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$	Tasa de Crecimiento
60	73,352	1,220	0.0166	7.95%	91	8,015	1,456	0.1817	6.80%
61	72,132	1,295	0.0180	7.91%	92	6,559	1,273	0.1941	6.82%
62	70,837	1,374	0.0194	8.10%	93	5,286	1,096	0.2073	6.83%
63	69,462	1,460	0.0210	8.29%	94	4,190	928	0.2215	6.82%
64	68,003	1,549	0.0228	8.39%	95	3,262	772	0.2365	6.80%
65	66,455	1,639	0.0247	8.27%	96	2,490	629	0.2526	6.77%
66	64,815	1,731	0.0267	8.26%	97	1,861	502	0.2696	6.74%
67	63,084	1,824	0.0289	8.25%	98	1,360	391	0.2876	6.69%
68	61,261	1,917	0.0313	8.24%	99	969	297	0.3067	6.63%
69	59,344	2,010	0.0339	8.23%	100	672	219	0.3268	6.55%
70	57,334	2,101	0.0367	8.22%	101	452	157	0.3479	6.47%
71	55,232	2,190	0.0397	8.21%	102	295	109	0.3701	6.38%
72	53,042	2,276	0.0429	8.19%	103	186	73	0.3933	6.27%
73	50,766	2,356	0.0464	8.18%	104	113	47	0.4175	6.15%
74	48,410	2,430	0.0502	8.16%	105	66	29	0.4426	6.03%
75	45,979	2,496	0.0543	8.14%	106	37	17	0.4687	5.89%
76	43,483	2,552	0.0587	8.12%	107	19	10	0.4956	5.73%
77	40,930	2,597	0.0635	8.10%	108	10	5	0.5232	5.57%
78	38,333	2,629	0.0686	8.08%	109	5	3	0.5514	5.40%
79	35,704	2,646	0.0741	8.06%	110	2	1	0.5801	5.21%
80	33,058	2,647	0.0801	8.03%	111	1	1	0.6092	5.01%
81	30,411	2,630	0.0865	8.00%	112	0	0	0.6384	4.80%
82	27,782	2,594	0.0934	7.97%	113	0	0	0.6676	4.58%
83	25,188	2,538	0.1008	7.94%	114	0	0	0.6967	4.35%
84	22,650	2,463	0.1087	7.90%	115	0	0	0.7253	4.11%
85	20,188	2,368	0.1173	7.86%	116	0	0	0.7532	3.86%
86	17,820	2,253	0.1264	7.82%	117	0	0	0.7803	3.60%
87	15,567	2,121	0.1363	7.78%	118	0	0	0.8064	3.34%
88	13,445	1,974	0.1468	7.73%	119	0	0	0.8311	3.07%
89	11,471	1,813	0.1581	7.68%	120	0	0		
90	9,658	1,643	0.1701	7.62%					

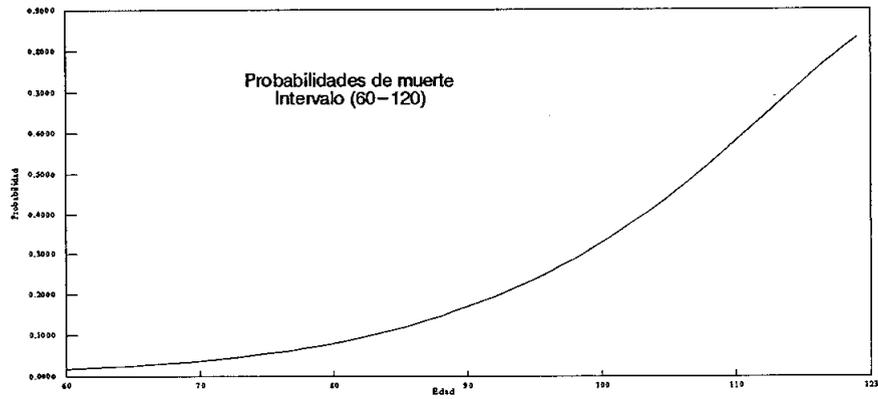
Gráfica-35



Gráfica-36



Gráfica-37



El cuadro-10 muestra el cálculo de las desviaciones y permite comprobar que el aumento de suavidad dado en las edades 50-80 ha disminuido la proximidad. Sin embargo, el ajuste realizado en esas edades es bueno, obsérvese que la suma de las desviaciones es cero y que además existe frecuencia en el cambio de signo y la extensión en la cual los términos positivos y negativos se equilibran unos con otros.

En conclusión, la serie final de probabilidades por edad, expuesta en el cuadro-9, describe la tendencia de la mortalidad en todo el rango de vida y tiene un grado de suavidad superior al de la tabla quinquenal. Naturalmente que se ha disminuído su proximidad, pero esto es normal, dado que la suavidad y proximidad son elementos que se compensan uno con otro y mantienen un balance que depende del procedimiento empleado.

Cuadro-10

Proximidad respecto a los datos quinquenales			
Edad	d(x,n)		Desviaciones.
	Estimados	Reales	
0	4,110	4,110	0
1	895	895	(0)
5	342	342	0
10	310	310	0
15	697	697	(0)
20	1,203	1,203	0
25	1,459	1,459	(0)
30	1,638	1,638	0
35	1,809	1,809	(0)
40	2,266	2,266	0
45	2,884	2,884	(0)
50	3,918	3,795	(123)
55	5,117	5,240	123
60	6,898	6,748	(150)
65	9,121	9,271	150
70	11,354	10,995	(360)
75	12,921	13,281	360
80	33,058	33,058	(0)
Total			0.0000

3.6 TABLA DE MORTALIDAD POR EDAD.

Una vez obtenida la serie anual de $q(x)$, se elabora la tabla de mortalidad por edad a partir de las expresiones que relacionan a las probabilidades de muerte con el resto de las funciones biométricas que constituyen la tabla. En las páginas siguientes se incluye la tabla por edad que resulta de aplicar los valores obtenidos para $q(x)$ (Cuadro-9) a una población hipotética de recién nacidos igual a 100,000. La tendencia de las diferentes funciones que la integran se ilustran en las gráficas 39 a 46.

Tabla de Mortalidad por Edad

Sexo masculino								México (1990-95)
EDAD	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$	$p(x)$	$L(x)$	$T(x)$	$m(x)$	$e(x)$
0	100,000	4,110	0.041100	0.958900	96,753	6,710,880	0.042479	67.11
1	95,890	417	0.004349	0.995651	95,682	6,614,127	0.004358	68.98
2	95,473	213	0.002231	0.997769	95,367	6,518,446	0.002233	68.28
3	95,260	146	0.001533	0.998467	95,187	6,423,079	0.001534	67.43
4	95,114	118	0.001241	0.998759	95,055	6,327,892	0.001241	66.53
5	94,996	97	0.001021	0.998979	94,947	6,232,837	0.001022	65.61
6	94,899	78	0.000820	0.999180	94,860	6,137,890	0.000821	64.68
7	94,821	64	0.000673	0.999327	94,789	6,043,030	0.000673	63.73
8	94,757	54	0.000573	0.999427	94,730	5,948,240	0.000573	62.77
9	94,703	49	0.000518	0.999482	94,679	5,853,510	0.000518	61.81
10	94,654	48	0.000507	0.999493	94,630	5,758,831	0.000507	60.84
11	94,606	51	0.000538	0.999462	94,581	5,664,201	0.000538	59.87
12	94,555	58	0.000614	0.999386	94,526	5,569,621	0.000614	58.90
13	94,497	69	0.000731	0.999269	94,463	5,475,095	0.000732	57.94
14	94,428	84	0.000885	0.999115	94,386	5,380,632	0.000885	56.98
15	94,344	100	0.001061	0.998939	94,294	5,286,246	0.001062	56.03
16	94,244	118	0.001255	0.998745	94,185	5,191,951	0.001256	55.09
17	94,126	138	0.001468	0.998532	94,057	5,097,766	0.001469	54.16
18	93,988	159	0.001696	0.998304	93,908	5,003,709	0.001697	53.24
19	93,829	181	0.001932	0.998068	93,738	4,909,801	0.001934	52.33
20	93,647	204	0.002182	0.997818	93,545	4,816,063	0.002185	51.43
21	93,443	227	0.002427	0.997573	93,330	4,722,518	0.002430	50.54
22	93,216	245	0.002633	0.997367	93,093	4,629,188	0.002636	49.66
23	92,971	259	0.002783	0.997217	92,841	4,536,095	0.002787	48.79
24	92,712	268	0.002892	0.997108	92,578	4,443,253	0.002896	47.93
25	92,444	276	0.002986	0.997014	92,306	4,350,675	0.002990	47.06
26	92,168	284	0.003083	0.996917	92,026	4,258,370	0.003088	46.20
27	91,884	292	0.003176	0.996824	91,738	4,166,344	0.003181	45.34
28	91,592	300	0.003271	0.996729	91,442	4,074,606	0.003276	44.49
29	91,292	307	0.003365	0.996635	91,139	3,983,164	0.003371	43.63
30	90,985	315	0.003463	0.996537	90,828	3,892,025	0.003469	42.78
31	90,670	322	0.003556	0.996444	90,509	3,801,197	0.003563	41.92
32	90,348	329	0.003638	0.996362	90,183	3,710,688	0.003645	41.07
33	90,019	334	0.003706	0.996294	89,852	3,620,505	0.003713	40.22
34	89,685	338	0.003768	0.996232	89,516	3,530,653	0.003775	39.37
35	89,347	342	0.003829	0.996171	89,176	3,441,137	0.003836	38.51
36	89,005	348	0.003910	0.996090	88,831	3,351,960	0.003917	37.66
37	88,657	357	0.004032	0.995968	88,479	3,263,129	0.004040	36.81
38	88,300	372	0.004210	0.995790	88,114	3,174,650	0.004219	35.95
39	87,928	390	0.004435	0.995565	87,733	3,086,536	0.004445	35.10
40	87,538	411	0.004693	0.995307	87,333	2,998,803	0.004704	34.26

Tabla de Mortalidad por Edad

Sexo masculino							México (1990-95)	
EDAD	l(x)	d(x)	q(x)	p(x)	L(x)	T(x)	m(x)	$\frac{d}{e}(x)$
41	87,127	432	0.004963	0.995037	86,911	2,911,470	0.004975	33.42
42	86,695	454	0.005235	0.994765	86,468	2,824,559	0.005249	32.58
43	86,241	474	0.005500	0.994500	86,004	2,738,091	0.005515	31.75
44	85,767	495	0.005770	0.994230	85,519	2,652,087	0.005787	30.92
45	85,272	516	0.006056	0.993944	85,014	2,566,568	0.006074	30.10
46	84,755	541	0.006384	0.993616	84,485	2,481,555	0.006405	29.28
47	84,214	571	0.006780	0.993220	83,929	2,397,070	0.006803	28.46
48	83,643	607	0.007259	0.992741	83,340	2,313,141	0.007286	27.65
49	83,036	648	0.007810	0.992190	82,712	2,229,801	0.007840	26.85
50	82,388	694	0.008420	0.991580	82,041	2,147,089	0.008456	26.06
51	81,694	740	0.009062	0.990938	81,324	2,065,048	0.009103	25.28
52	80,954	786	0.009704	0.990296	80,561	1,983,725	0.009752	24.50
53	80,168	828	0.010331	0.989669	79,754	1,903,164	0.010385	23.74
54	79,340	870	0.010965	0.989035	78,905	1,823,410	0.011026	22.98
55	78,470	913	0.011639	0.988361	78,013	1,744,505	0.011707	22.23
56	77,557	962	0.012397	0.987603	77,076	1,666,492	0.012475	21.49
57	76,595	1,016	0.013266	0.986734	76,087	1,589,416	0.013355	20.75
58	75,579	1,079	0.014273	0.985727	75,040	1,513,329	0.014375	20.02
59	74,500	1,148	0.015409	0.984591	73,926	1,438,290	0.015529	19.31
60	73,352	1,220	0.016634	0.983366	72,742	1,364,364	0.016774	18.60
61	72,132	1,295	0.017950	0.982050	71,485	1,291,622	0.018113	17.91
62	70,837	1,374	0.019404	0.980596	70,150	1,220,137	0.019594	17.22
63	69,463	1,460	0.021012	0.978988	68,733	1,149,987	0.021235	16.56
64	68,003	1,549	0.022774	0.977226	67,229	1,081,254	0.023036	15.90
65	66,454	1,639	0.024669	0.975331	65,635	1,014,025	0.024977	15.26
66	64,815	1,731	0.026707	0.973293	63,950	948,390	0.027068	14.63
67	63,084	1,824	0.028911	0.971089	62,172	884,441	0.029335	14.02
68	61,260	1,917	0.031293	0.968707	60,302	822,268	0.031791	13.42
69	59,343	2,010	0.033869	0.966131	58,338	761,967	0.034452	12.84
70	57,333	2,101	0.036652	0.963348	56,283	703,628	0.037336	12.27
71	55,232	2,190	0.039659	0.960341	54,137	647,346	0.040462	11.72
72	53,042	2,276	0.042908	0.957092	51,904	593,209	0.043849	11.18
73	50,766	2,356	0.046416	0.953584	49,587	541,305	0.047519	10.66
74	48,409	2,430	0.050203	0.949797	47,194	491,718	0.051496	10.16
75	45,979	2,496	0.054291	0.945709	44,731	444,524	0.055806	9.67
76	43,483	2,552	0.058701	0.941299	42,206	399,793	0.060476	9.19
77	40,930	2,597	0.063457	0.936543	39,632	357,586	0.065536	8.74
78	38,333	2,629	0.068584	0.931416	37,018	317,955	0.071020	8.29
79	35,704	2,646	0.074109	0.925891	34,381	280,936	0.076961	7.87
80	33,058	2,647	0.080059	0.919941	31,735	246,555	0.083398	7.46

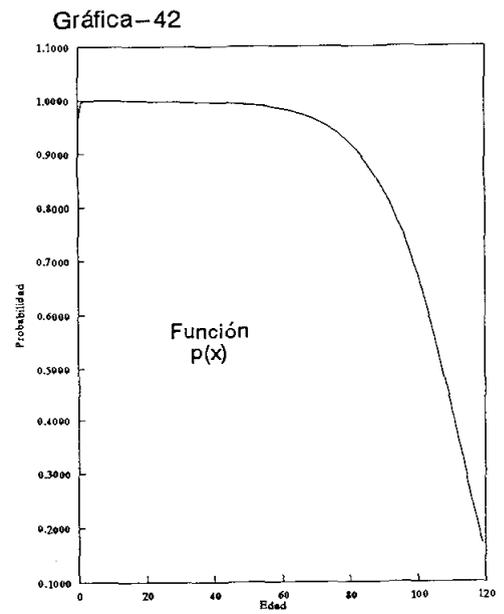
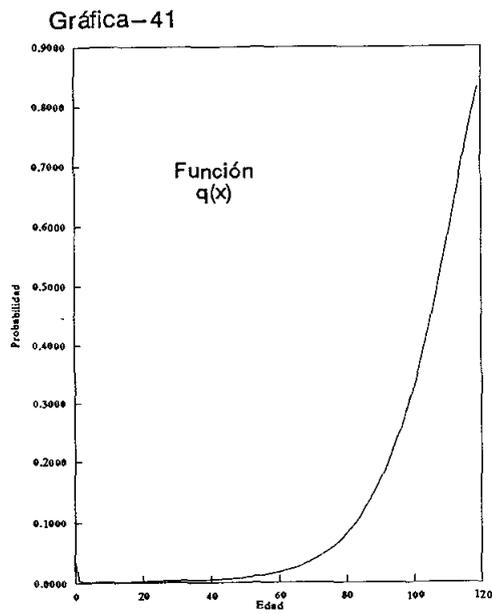
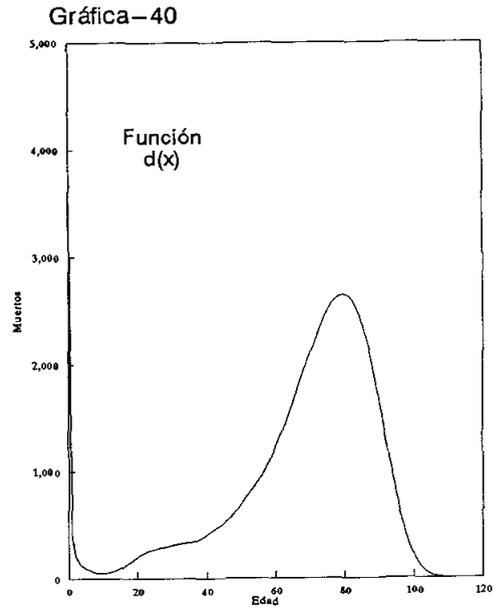
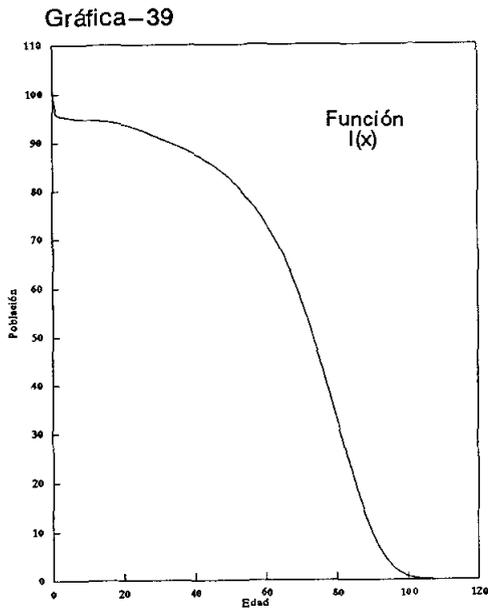
Tabla de Mortalidad por Edad

Sexo masculino

México (1990-95)

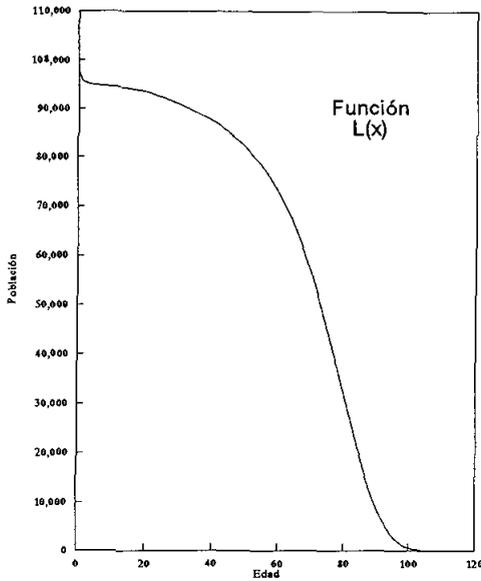
EDAD	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$	$p(x)$	$L(x)$	$T(x)$	$m(x)$	${}^o_e(x)$
81	30,411	2,630	0.086465	0.913535	29,097	214,821	0.090372	7.06
82	27,782	2,594	0.093356	0.906644	26,485	185,724	0.097927	6.69
83	25,188	2,538	0.100766	0.899234	23,919	159,239	0.106112	6.32
84	22,650	2,463	0.108728	0.891272	21,419	135,320	0.114978	5.97
85	20,187	2,368	0.117277	0.882723	19,004	113,901	0.124582	5.64
86	17,820	2,253	0.126449	0.873551	16,693	94,898	0.134983	5.33
87	15,567	2,121	0.136282	0.863718	14,506	78,204	0.146247	5.02
88	13,445	1,974	0.146813	0.853187	12,458	63,698	0.158444	4.74
89	11,471	1,813	0.158081	0.841919	10,565	51,240	0.171648	4.47
90	9,658	1,643	0.170124	0.829876	8,836	40,676	0.185941	4.21
91	8,015	1,456	0.181696	0.818304	7,287	31,839	0.199852	3.97
92	6,559	1,273	0.194086	0.805914	5,922	24,553	0.214945	3.74
93	5,286	1,096	0.207333	0.792667	4,738	18,631	0.231312	3.52
94	4,190	928	0.221472	0.778528	3,726	13,893	0.249050	3.32
95	3,262	772	0.236538	0.763462	2,876	10,167	0.268265	3.12
96	2,490	629	0.252563	0.747437	2,176	7,291	0.289067	2.93
97	1,861	502	0.269576	0.730424	1,610	5,115	0.311572	2.75
98	1,360	391	0.287600	0.712400	1,164	3,505	0.335903	2.58
99	969	297	0.306655	0.693345	820	2,341	0.362189	2.42
100	672	219	0.326752	0.673248	562	1,521	0.390561	2.26
101	452	157	0.347895	0.652105	373	959	0.421154	2.12
102	295	109	0.370079	0.629921	240	585	0.454107	1.99
103	186	73	0.393287	0.606713	149	345	0.489556	1.86
104	113	47	0.417492	0.582508	89	196	0.527633	1.74
105	66	29	0.442649	0.557351	51	107	0.568464	1.63
106	37	17	0.468703	0.531297	28	56	0.612165	1.52
107	19	10	0.495579	0.504421	15	28	0.658830	1.43
108	10	5	0.523184	0.476816	7	13	0.708531	1.33
109	5	3	0.551410	0.448590	3	6	0.761306	1.25
110	2	1	0.580127	0.419873	1	2	0.817153	1.17
111	1	1	0.609186	0.390814	1	1	0.876013	1.10
112	0	0	0.638420	0.361580	0	0	0.937763	1.03
113	0	0	0.667646	0.332354	0	0	1.002206	0.97
114	0	0	0.696665	0.303335	0	0	1.069051	0.91
115	0	0	0.725267	0.274733	0	0	1.137912	0.86
116	0	0	0.753232	0.246768	0	0	1.208295	0.81
117	0	0	0.780339	0.219661	0	0	1.279599	0.77
118	0	0	0.806368	0.193632	0	0	1.351116	0.73
119	0	0	0.831109	0.168891	0	0	1.422047	0.67
120	0	0	0.000000	1.000000	0	0	2.000000	0.50

Gráficas de la Tabla de Mortalidad por Edad

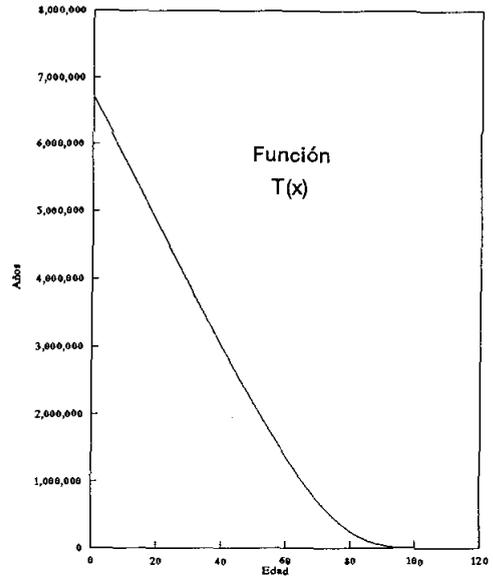


Gráficas de la Tabla de Mortalidad por Edad

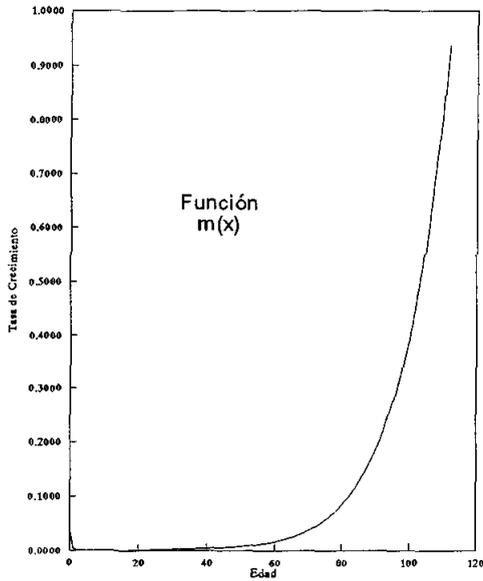
Gráfica-43



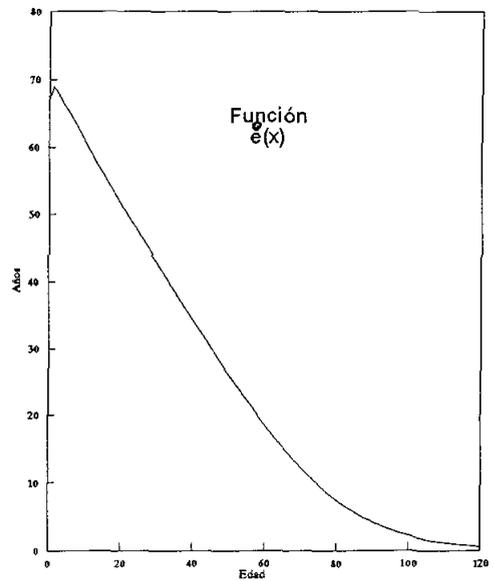
Gráfica-44



Gráfica-45



Gráfica-46



3.7 PROCEDIMIENTO ALTERNATIVO.

Como se ha venido mencionando, existen múltiples alternativas para desplegar una tabla abreviada de mortalidad, todo depende del uso que se pretenda dar a la tabla desplegada. En este caso, por ejemplo, se sugiere un procedimiento menos elaborado que el anterior; su aplicación comprende, desplegar el intervalo superior en base a la experiencia registrada en una tabla de mortalidad previamente elaborada, interpolar en las edades 5-79 con el método de multiplicadores de Beers y construir el intervalo inferior a partir de una tasa promedio de crecimiento que se decrementa después de edad 90 .

Para los dos primeros intervalos la aplicación es inmediata, mientras que para el intervalo inferior se hará uso de dos procedimientos, el primero para calcular la tasa promedio anual de crecimiento de la mortalidad en un período de m años anteriores a edad 79¹ (m debe pertenecer el período en el que el crecimiento de la mortalidad comienza a ser exponencial):

$$r_m = \sqrt[m]{q^{(79)}/q^{(79-n)}} - 1$$

con la cual se hace crecer en forma exponencial la probabilidad de muerte de edad 79 a edad 89 :

$$\begin{aligned} q^{(80)} &= q^{(79)}(1+r_m) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ q^{(89)} &= q^{(79)}(1+r_m)^{10} \end{aligned}$$

¹ Se toma la edad 79 debido a que es la última edad para la cual, en este ejemplo, se tienen valores al interpolar con el método de Beers.

Con el segundo procedimiento, se pretende que la tasa de crecimiento de la mortalidad sea cada vez menor en edades posteriores a 90, para ello se continúa de manera similar al proceso anterior, con la variante de que r_m decrece progresivamente, a una tasa k , con el transcurso del tiempo :

$$q_{(90)} = q_{(89)}(1+r_m k^0)$$

$$q_{(91)} = q_{(90)}(1+r_m k^1)$$

.

.

.

$$q_{(w)} = q_{(w-1)}(1+r_m k^{w-90})$$

$w = \text{última edad de la tabla}$

El valor de k , porcentaje al cual decrece progresivamente la tasa r_m , está influenciado por la esperanza de vida supuesta en la tabla abreviada para las edades de extrapolación, de igual forma que por $L_{(80,w)}$, número de personas que en promedio está vigente entre las edades 80 y w .

Nótese que el valor de r_m depende de $q_{(79)}$ y que $q_{(79)}$ a su vez, depende del resultado asociado a $d_{(79)}$ a través de la aplicación del renglón respectivo de la matriz para el quinto grupo del método de Beers, por lo que al estimar valores para las edades $80-w$, $d_{(79)}$ al igual que los puntos interpolados en $70-79$, se pueden calcular de nuevo, pero ahora con la matriz para grupos centrales, modificando así $q_{(79)}$ y a su vez r_m y los valores de $80-w$. Sin embargo, un recálculo iterativo de $q_{(79)}$, $d_{(70,5)}$ y $d_{(75,5)}$ acompañado de la correspondiente aplicación de la matriz para grupos centrales hace que r_m converja cuando $d_{(70,5)}$ y $d_{(75,5)}$ también lo hacen.

En lo referente a la eliminación de las irregularidades presentes en la unión de las curvas 0-4, 5-79, 80-89 y 90-w, se puede recurrir a una nueva aplicación del método de Beers.

Para eliminar la irregularidad entre 0-4 y 5-79 se varía reiteradamente el valor supuesto de $d(0,5)$ a la vez que se vuelve a aplicar la matriz para el segundo grupo, hasta lograr la suavidad deseada. En el resto de las edades la suavidad puede mejorar aplicando convenientemente la matriz para grupos centrales.

A manera de ilustración se muestra en seguida la tabla por edad que resulta de aplicar esta alternativa a la tabla abreviada del cuadro-1. Los factores que intervinieron en el cálculo son :

- Un valor supuesto $d(0,5)$ igual a 990.
- Período para determinar la tasa promedio de crecimiento de 30 años.
- Decremento de la mortalidad después de edad 90 a razón de 94%, esto es, $k=0.94$.

El desarrollo de los intervalos superior y central se realizó como se explica 3.2 y 3.3.

Tabla de Mortalidad por Edad

Sexo masculino México (1990-95)

EDAD	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$	$p(x)$	$L(x)$	$T(x)$	$m(x)$	$e(x)$
0	100,000	4,110	0.041100	0.958900	96,753	6,709,207	0.042479	67.09
1	95,890	417	0.004347	0.995653	95,682	6,612,454	0.004357	68.96
2	95,473	213	0.002233	0.997767	95,367	6,516,773	0.002236	68.26
3	95,260	146	0.001535	0.998465	95,187	6,421,406	0.001536	67.41
4	95,114	118	0.001244	0.998756	95,055	6,326,219	0.001245	66.51
5	94,995	97	0.001021	0.998979	94,947	6,231,165	0.001022	65.59
6	94,898	78	0.000820	0.999180	94,859	6,136,218	0.000821	64.66
7	94,820	64	0.000673	0.999327	94,789	6,041,358	0.000673	63.71
8	94,757	54	0.000573	0.999427	94,730	5,946,570	0.000573	62.76
9	94,702	49	0.000518	0.999482	94,678	5,851,840	0.000518	61.79
10	94,653	48	0.000507	0.999493	94,629	5,757,162	0.000507	60.82
11	94,605	51	0.000538	0.999462	94,580	5,662,533	0.000538	59.85
12	94,554	58	0.000614	0.999386	94,525	5,567,953	0.000614	58.89
13	94,496	69	0.000731	0.999269	94,462	5,473,428	0.000732	57.92
14	94,427	84	0.000885	0.999115	94,386	5,378,966	0.000885	56.96
15	94,344	100	0.001061	0.998939	94,294	5,284,580	0.001062	56.01
16	94,244	118	0.001255	0.998745	94,185	5,190,286	0.001256	55.07
17	94,125	138	0.001468	0.998532	94,056	5,096,102	0.001469	54.14
18	93,987	159	0.001696	0.998304	93,908	5,002,045	0.001697	53.22
19	93,828	181	0.001932	0.998068	93,737	4,908,138	0.001934	52.31
20	93,647	204	0.002182	0.997818	93,544	4,814,400	0.002185	51.41
21	93,442	227	0.002427	0.997573	93,329	4,720,856	0.002430	50.52
22	93,216	245	0.002633	0.997367	93,093	4,627,527	0.002636	49.64
23	92,970	259	0.002783	0.997217	92,841	4,534,434	0.002787	48.77
24	92,711	268	0.002892	0.997108	92,577	4,441,593	0.002896	47.91
25	92,443	276	0.002986	0.997014	92,305	4,349,016	0.002990	47.05
26	92,167	284	0.003083	0.996917	92,025	4,256,711	0.003088	46.18
27	91,883	292	0.003176	0.996824	91,737	4,164,685	0.003181	45.33
28	91,591	300	0.003271	0.996729	91,442	4,072,948	0.003276	44.47
29	91,292	307	0.003365	0.996635	91,138	3,981,507	0.003371	43.61
30	90,985	315	0.003463	0.996537	90,827	3,890,369	0.003469	42.76
31	90,669	322	0.003556	0.996444	90,508	3,799,542	0.003563	41.91
32	90,347	329	0.003638	0.996362	90,183	3,709,033	0.003645	41.05
33	90,018	334	0.003706	0.996294	89,851	3,618,851	0.003713	40.20
34	89,685	338	0.003768	0.996232	89,516	3,528,999	0.003775	39.35
35	89,347	342	0.003829	0.996171	89,176	3,439,483	0.003836	38.50
36	89,005	348	0.003910	0.996090	88,831	3,350,308	0.003917	37.64
37	88,657	357	0.004032	0.995968	88,478	3,261,477	0.004040	36.79
38	88,299	372	0.004210	0.995790	88,113	3,172,999	0.004219	35.93
39	87,927	390	0.004435	0.995565	87,733	3,084,885	0.004445	35.08
40	87,538	410	0.004689	0.995311	87,332	2,997,153	0.004700	34.24

Tabla de Mortalidad por Edad

Sexo masculino								México (1990-95)
EDAD	l(x)	d(x)	q(x)	p(x)	L(x)	T(x)	m(x)	$^o_e(x)$
41	87,127	432	0.004955	0.995045	86,911	2,909,821	0.004967	33.40
42	86,695	453	0.005228	0.994772	86,469	2,822,909	0.005242	32.56
43	86,242	475	0.005503	0.994497	86,005	2,736,441	0.005518	31.73
44	85,768	496	0.005787	0.994213	85,519	2,650,436	0.005804	30.90
45	85,271	520	0.006100	0.993900	85,011	2,564,917	0.006119	30.08
46	84,751	547	0.006451	0.993549	84,478	2,479,905	0.006472	29.26
47	84,204	575	0.006828	0.993172	83,917	2,395,428	0.006852	28.45
48	83,629	605	0.007233	0.992767	83,327	2,311,511	0.007259	27.64
49	83,024	637	0.007673	0.992327	82,706	2,228,184	0.007703	26.84
50	82,387	671	0.008139	0.991861	82,052	2,145,478	0.008172	26.04
51	81,717	707	0.008656	0.991344	81,363	2,063,426	0.008694	25.25
52	81,009	751	0.009272	0.990728	80,634	1,982,063	0.009315	24.47
53	80,258	803	0.010011	0.989989	79,857	1,901,429	0.010061	23.69
54	79,455	862	0.010853	0.989147	79,024	1,821,573	0.010912	22.93
55	78,593	927	0.011800	0.988200	78,129	1,742,549	0.011870	22.17
56	77,665	993	0.012791	0.987209	77,168	1,664,420	0.012873	21.43
57	76,672	1,055	0.013754	0.986246	76,144	1,587,252	0.013850	20.70
58	75,617	1,108	0.014649	0.985351	75,063	1,511,107	0.014757	19.98
59	74,509	1,157	0.015524	0.984476	73,931	1,436,044	0.015646	19.27
60	73,353	1,203	0.016395	0.983605	72,751	1,362,113	0.016531	18.57
61	72,150	1,256	0.017406	0.982594	71,522	1,289,361	0.017559	17.87
62	70,894	1,328	0.018726	0.981274	70,230	1,217,839	0.018903	17.18
63	69,567	1,424	0.020470	0.979530	68,855	1,147,609	0.020682	16.50
64	68,143	1,538	0.022565	0.977435	67,374	1,078,754	0.022822	15.83
65	66,605	1,660	0.024929	0.975071	65,775	1,011,380	0.025244	15.18
66	64,945	1,777	0.027363	0.972637	64,056	945,605	0.027743	14.56
67	63,168	1,877	0.029708	0.970292	62,229	881,549	0.030156	13.96
68	61,291	1,951	0.031825	0.968175	60,316	819,320	0.032340	13.37
69	59,340	2,007	0.033817	0.966183	58,337	759,004	0.034399	12.79
70	57,334	2,051	0.035774	0.964226	56,308	700,667	0.036426	12.22
71	55,283	2,102	0.038015	0.961985	54,232	644,359	0.038751	11.66
72	53,181	2,173	0.040859	0.959141	52,095	590,127	0.041711	11.10
73	51,008	2,275	0.044594	0.955406	49,871	538,033	0.045611	10.55
74	48,733	2,395	0.049138	0.950862	47,536	488,162	0.050376	10.02
75	46,339	2,515	0.054275	0.945725	45,081	440,626	0.055789	9.51
76	43,824	2,616	0.059689	0.940311	42,516	395,544	0.061525	9.03
77	41,208	2,690	0.065272	0.934728	39,863	353,029	0.067474	8.57
78	38,518	2,727	0.070802	0.929198	37,155	313,166	0.073401	8.13
79	35,791	2,733	0.076360	0.923640	34,425	276,011	0.079391	7.71
80	33,058	2,725	0.082438	0.917562	31,695	241,586	0.085982	7.31

Tabla de Mortalidad por Edad

Sexo masculino								México (1990-95)
EDAD	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$	$p(x)$	$L(x)$	$T(x)$	$m(x)$	$^o e(x)$
81	30,333	2,700	0.089000	0.911000	28,983	209,891	0.093145	6.92
82	27,633	2,655	0.096084	0.903916	26,306	180,908	0.100933	6.55
83	24,978	2,591	0.103733	0.896267	23,683	154,602	0.109407	6.19
84	22,387	2,507	0.111990	0.888010	21,133	130,920	0.118632	5.85
85	19,880	2,404	0.120904	0.879096	18,678	109,786	0.128683	5.52
86	17,476	2,281	0.130528	0.869472	16,336	91,108	0.139641	5.21
87	15,195	2,141	0.140918	0.859082	14,125	74,772	0.151599	4.92
88	13,054	1,986	0.152134	0.847866	12,061	60,648	0.164660	4.65
89	11,068	1,818	0.164244	0.835756	10,159	48,587	0.178939	4.39
90	9,250	1,633	0.176533	0.823467	8,434	38,427	0.193624	4.15
91	7,617	1,439	0.188950	0.811050	6,898	29,994	0.208663	3.94
92	6,178	1,244	0.201442	0.798558	5,556	23,096	0.224004	3.74
93	4,933	1,056	0.213961	0.786039	4,406	17,541	0.239593	3.56
94	3,878	878	0.226460	0.773540	3,439	13,135	0.255376	3.39
95	3,000	717	0.238896	0.761104	2,641	9,696	0.271302	3.23
96	2,283	574	0.251227	0.748773	1,996	7,055	0.287318	3.09
97	1,710	450	0.263417	0.736583	1,484	5,058	0.303374	2.96
98	1,259	347	0.275431	0.724569	1,086	3,574	0.319421	2.84
99	912	262	0.287240	0.712760	781	2,488	0.335412	2.73
100	650	194	0.298816	0.701184	553	1,707	0.351304	2.62
101	456	141	0.310136	0.689864	385	1,154	0.367054	2.53
102	315	101	0.321180	0.678820	264	769	0.382626	2.44
103	214	71	0.331931	0.668069	178	505	0.397982	2.36
104	143	49	0.342375	0.657625	118	326	0.413091	2.29
105	94	33	0.352501	0.647499	77	208	0.427923	2.22
106	61	22	0.362302	0.637698	50	131	0.442452	2.16
107	39	14	0.371770	0.628230	32	81	0.456656	2.10
108	24	9	0.380903	0.619097	20	50	0.470513	2.04
109	15	6	0.389699	0.610301	12	30	0.484008	1.99
110	9	4	0.398158	0.601842	7	18	0.497125	1.94
111	6	2	0.406282	0.593718	4	10	0.509855	1.90
112	3	1	0.414075	0.585925	3	6	0.522187	1.85
113	2	1	0.421540	0.578460	2	3	0.534116	1.81
114	1	0	0.428684	0.571316	1	2	0.545637	1.76
115	1	0	0.435513	0.564487	0	1	0.556749	1.70
116	0	0	0.442035	0.557965	0	1	0.567452	1.62
117	0	0	0.448257	0.551743	0	0	0.577747	1.52
118	0	0	0.454189	0.545811	0	0	0.587638	1.34
119	0	0	0.459838	0.540162	0	0	0.597129	1.04
120	0	0	0.465214	0.534786	0	0	2.000000	0.50

3.8 TABLA DE MORTALIDAD TOTAL.

Cuando se conocen las tablas por edad tanto para hombres como para mujeres, el siguiente paso es obtener la tabla de mortalidad total. Si esta se tiene en forma abreviada, el problema se resuelve desplegando como se hizo anteriormente para la tabla abreviada de hombres. Si en cambio se debe construir, es necesario desarrollar un proceso para esto.

Una alternativa consiste en considerar como base el índice de masculinidad al nacimiento, en función del cual por cada mujer que nace nacen "v" hombres. Se inicia tomando una raíz (población a edad cero) igual a $10^n(1+v)$ para hombres y una de 10^n , $n \in \mathbb{Z}^+$, para mujeres; luego se aplican las probabilidades de muerte, $q(x)$, de las correspondientes tablas por edad :

$$\begin{aligned} l^H(0) &= 10^n(1+v) & l^M(0) &= 10^n \\ l^H(x+1) &= l^H(x)q^H(x) & l^M(x+1) &= l^M(x)q^M(x) \end{aligned}$$

La población total a edad exacta x es la suma de hombres más mujeres, ambos a edad exacta x .

$$l^T(x) = l^H(x) + l^M(x)$$

Conocida $l^T(x)$ en todo el rango de vida se procede a construir $q^T(x)$ para cada edad :

$$q^T(x) = \frac{d^T(x)}{l^T(x)}$$

$$\text{donde } d^T(x) = l(x) - l(x+1)$$

Finalmente, la tabla de mortalidad total se obtiene determinando el resto de las funciones biométricas a partir de $q^T(x)$.

A continuación se muestra la tabla por edad para mujeres, deducida de una tabla quinquenal para México en el período 1990-95 (Anexo C, Tabla-C.1) a través de un procedimiento análogo al utilizado para desplegar la tabla de hombres en 3.6. Los factores empleados son los siguientes :

- Un valor supuesto $d_{(0,5)}$ igual a 990.
- Período para determinar la tasa promedio de crecimiento de 30 años.
- Decremento de la mortalidad después de edad 90 a razón de 95%, esto es, $k=0.95$.

Además, también se incluye la tabla de mortalidad total obtenida considerando un índice de masculinidad al nacimiento de 1.03.

Finalmente, en las gráficas 47 a 54 se ilustran las tendencias que registran las diferentes funciones biométricas a lo largo de todo el rango de vida, para las tablas desplegadas de hombres, mujeres y total.

Tabla de Mortalidad por Edad

Sexo femenino							México (1990-95)	
EDAD	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$	$p(x)$	$L(x)$	$T(x)$	$m(x)$	$e(x)$
0	100,000	3,032	0.030320	0.969680	97,544	7,468,301	0.031083	74.68
1	96,968	414	0.004268	0.995732	96,761	7,370,757	0.004277	76.01
2	96,554	212	0.002192	0.997808	96,448	7,273,996	0.002195	75.34
3	96,342	145	0.001507	0.998493	96,270	7,177,548	0.001508	74.50
4	96,197	118	0.001222	0.998778	96,139	7,081,278	0.001222	73.61
5	96,080	81	0.000841	0.999159	96,039	6,985,139	0.000842	72.70
6	95,999	58	0.000601	0.999399	95,970	6,889,100	0.000601	71.76
7	95,941	41	0.000432	0.999568	95,921	6,793,130	0.000432	70.81
8	95,900	32	0.000333	0.999667	95,884	6,697,209	0.000333	69.84
9	95,868	28	0.000296	0.999704	95,854	6,601,325	0.000296	68.86
10	95,840	29	0.000306	0.999694	95,825	6,505,472	0.000306	67.88
11	95,810	33	0.000343	0.999657	95,794	6,409,647	0.000343	66.90
12	95,777	37	0.000385	0.999615	95,759	6,313,853	0.000385	65.92
13	95,741	40	0.000417	0.999583	95,721	6,218,094	0.000417	64.95
14	95,701	42	0.000441	0.999559	95,680	6,122,373	0.000441	63.97
15	95,658	46	0.000481	0.999519	95,635	6,026,694	0.000481	63.00
16	95,612	51	0.000538	0.999462	95,587	5,931,058	0.000538	62.03
17	95,561	56	0.000591	0.999409	95,533	5,835,472	0.000591	61.07
18	95,504	61	0.000634	0.999366	95,474	5,739,939	0.000634	60.10
19	95,444	64	0.000669	0.999331	95,412	5,644,465	0.000670	59.14
20	95,380	68	0.000708	0.999292	95,346	5,549,053	0.000708	58.18
21	95,313	72	0.000752	0.999248	95,277	5,453,706	0.000752	57.22
22	95,241	76	0.000797	0.999203	95,203	5,358,430	0.000797	56.26
23	95,165	80	0.000842	0.999158	95,125	5,263,227	0.000842	55.31
24	95,085	84	0.000888	0.999112	95,043	5,168,102	0.000889	54.35
25	95,000	89	0.000937	0.999063	94,956	5,073,059	0.000938	53.40
26	94,911	94	0.000990	0.999010	94,864	4,978,103	0.000990	52.45
27	94,817	99	0.001047	0.998953	94,768	4,883,239	0.001048	51.50
28	94,718	105	0.001110	0.998890	94,666	4,788,471	0.001110	50.55
29	94,613	111	0.001177	0.998823	94,557	4,693,805	0.001178	49.61
30	94,502	118	0.001249	0.998751	94,443	4,599,248	0.001250	48.67
31	94,384	125	0.001326	0.998674	94,321	4,504,805	0.001327	47.73
32	94,258	133	0.001411	0.998589	94,192	4,410,484	0.001412	46.79
33	94,125	142	0.001506	0.998494	94,055	4,316,292	0.001507	45.86
34	93,984	151	0.001608	0.998392	93,908	4,222,237	0.001609	44.93
35	93,833	161	0.001719	0.998281	93,752	4,128,329	0.001720	44.00
36	93,671	172	0.001834	0.998166	93,585	4,034,577	0.001836	43.07
37	93,500	183	0.001952	0.998048	93,408	3,940,992	0.001954	42.15
38	93,317	193	0.002071	0.997929	93,220	3,847,584	0.002073	41.23
39	93,124	204	0.002192	0.997808	93,022	3,754,363	0.002194	40.32
40	92,920	216	0.002322	0.997678	92,812	3,661,341	0.002325	39.40

Tabla de Mortalidad por Edad

Sexo femenino							México (1990-95)	
EDAD	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$	$p(x)$	$L(x)$	$T(x)$	$m(x)$	$e(x)$
41	92,704	228	0.002464	0.997536	92,590	3,568,530	0.002467	38.49
42	92,475	242	0.002613	0.997387	92,355	3,475,940	0.002616	37.59
43	92,234	256	0.002771	0.997229	92,106	3,383,585	0.002774	36.68
44	91,978	270	0.002939	0.997061	91,843	3,291,479	0.002943	35.79
45	91,708	287	0.003125	0.996875	91,565	3,199,636	0.003130	34.89
46	91,421	304	0.003330	0.996670	91,269	3,108,072	0.003335	34.00
47	91,117	323	0.003548	0.996452	90,955	3,016,802	0.003554	33.11
48	90,794	343	0.003781	0.996219	90,622	2,925,847	0.003788	32.23
49	90,450	365	0.004033	0.995967	90,268	2,835,225	0.004041	31.35
50	90,086	389	0.004316	0.995684	89,891	2,744,957	0.004325	30.47
51	89,697	416	0.004634	0.995366	89,489	2,655,066	0.004645	29.60
52	89,281	445	0.004988	0.995012	89,059	2,565,577	0.005001	28.74
53	88,836	478	0.005382	0.994618	88,597	2,476,518	0.005396	27.88
54	88,358	514	0.005821	0.994179	88,101	2,387,921	0.005838	27.03
55	87,843	554	0.006306	0.993694	87,566	2,299,821	0.006326	26.18
56	87,289	598	0.006849	0.993151	86,991	2,212,254	0.006873	25.34
57	86,692	648	0.007469	0.992531	86,368	2,125,264	0.007497	24.52
58	86,044	704	0.008177	0.991823	85,692	2,038,896	0.008211	23.70
59	85,341	766	0.008973	0.991027	84,958	1,953,204	0.009013	22.89
60	84,575	832	0.009839	0.990161	84,159	1,868,246	0.009888	22.09
61	83,743	903	0.010782	0.989218	83,291	1,784,087	0.010840	21.30
62	82,840	980	0.011831	0.988169	82,350	1,700,796	0.011901	20.53
63	81,860	1,064	0.012999	0.987001	81,328	1,618,446	0.013084	19.77
64	80,796	1,154	0.014284	0.985716	80,219	1,537,119	0.014386	19.02
65	79,642	1,248	0.015670	0.984330	79,018	1,456,900	0.015793	18.29
66	78,394	1,345	0.017156	0.982844	77,721	1,377,883	0.017305	17.58
67	77,049	1,446	0.018764	0.981236	76,326	1,300,162	0.018942	16.87
68	75,603	1,550	0.020502	0.979498	74,828	1,223,836	0.020715	16.19
69	74,053	1,657	0.022378	0.977622	73,224	1,149,008	0.022631	15.52
70	72,396	1,765	0.024384	0.975616	71,513	1,075,784	0.024684	14.86
71	70,630	1,874	0.026537	0.973463	69,693	1,004,270	0.026894	14.22
72	68,756	1,986	0.028877	0.971123	67,763	934,577	0.029301	13.59
73	66,771	2,099	0.031432	0.968568	65,721	866,814	0.031934	12.98
74	64,672	2,212	0.034211	0.965789	63,566	801,092	0.034806	12.39
75	62,459	2,322	0.037178	0.962822	61,298	737,527	0.037882	11.81
76	60,137	2,428	0.040367	0.959633	58,924	676,228	0.041199	11.24
77	57,710	2,532	0.043878	0.956122	56,444	617,305	0.044862	10.70
78	55,178	2,636	0.047777	0.952223	53,859	560,861	0.048946	10.16
79	52,541	2,736	0.052076	0.947924	51,173	507,002	0.053469	9.65
80	49,805	2,825	0.056712	0.943288	48,393	455,829	0.058367	9.15

Tabla de Mortalidad por Edad

Sexo femenina								México (1990-95)
EDAD	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$	$p(x)$	$L(x)$	$T(x)$	$m(x)$	${}^o_e(x)$
81	46,981	2,902	0.061760	0.938240	45,530	407,436	0.063728	8.67
82	44,079	2,965	0.067258	0.932742	42,597	361,906	0.069598	8.21
83	41,114	3,011	0.073244	0.926756	39,609	319,309	0.076029	7.77
84	38,103	3,039	0.079764	0.920236	36,583	279,700	0.083078	7.34
85	35,064	3,046	0.086864	0.913136	33,541	243,117	0.090808	6.93
86	32,018	3,029	0.094597	0.905403	30,504	209,576	0.099293	6.55
87	28,989	2,986	0.103017	0.896983	27,496	179,073	0.108612	6.18
88	26,003	2,917	0.112187	0.887813	24,544	151,577	0.118854	5.83
89	23,086	2,820	0.122173	0.877827	21,675	127,032	0.130122	5.50
90	20,265	2,685	0.132505	0.867495	18,923	105,357	0.141906	5.20
91	17,580	2,517	0.143150	0.856850	16,322	86,435	0.154186	4.92
92	15,063	2,321	0.154075	0.845925	13,903	70,113	0.166935	4.65
93	12,742	2,106	0.165246	0.834754	11,690	56,210	0.180128	4.41
94	10,637	1,879	0.176627	0.823373	9,697	44,520	0.193737	4.19
95	8,758	1,648	0.188185	0.811815	7,934	34,823	0.207731	3.98
96	7,110	1,421	0.199883	0.800117	6,399	26,889	0.222077	3.78
97	5,689	1,204	0.211687	0.788313	5,087	20,489	0.236744	3.60
98	4,485	1,003	0.223562	0.776438	3,983	15,403	0.251697	3.43
99	3,482	820	0.235477	0.764523	3,072	11,419	0.266902	3.28
100	2,662	659	0.247400	0.752600	2,333	8,347	0.282323	3.14
101	2,003	519	0.259300	0.740700	1,744	6,015	0.297926	3.00
102	1,484	402	0.271149	0.728851	1,283	4,271	0.313675	2.88
103	1,082	306	0.282919	0.717081	929	2,988	0.329535	2.76
104	776	228	0.294587	0.705413	661	2,060	0.345472	2.66
105	547	167	0.306128	0.693872	463	1,398	0.361453	2.56
106	380	121	0.317522	0.682478	319	935	0.377445	2.46
107	259	85	0.328748	0.671252	216	616	0.393416	2.38
108	174	59	0.339791	0.660209	144	399	0.409335	2.29
109	115	40	0.350634	0.649366	95	255	0.425174	2.22
110	75	27	0.361263	0.638737	61	160	0.440905	2.15
111	48	18	0.371667	0.628333	39	99	0.456501	2.08
112	30	11	0.381836	0.618164	24	60	0.471937	2.01
113	18	7	0.391760	0.608240	15	36	0.487191	1.94
114	11	5	0.401434	0.598566	9	21	0.502242	1.87
115	7	3	0.410850	0.589150	5	12	0.517069	1.80
116	4	2	0.420005	0.579995	3	7	0.531654	1.70
117	2	1	0.428897	0.571103	2	4	0.545982	1.57
118	1	1	0.437523	0.562477	1	2	0.560037	1.37
119	1	0	0.445882	0.554118	1	1	0.573807	1.05
120	0	0	0.453975	0.546025	0	0	2.000000	0.50

Tabla de Mortalidad por Edad

Total		México (1990-95)						
EDAD	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$	$p(x)$	$L(x)$	$T(x)$	$m(x)$	${}_0e(x)$
0	100,000	3,579	0.035790	0.964210	97,143	7,083,145	0.036842	70.83
1	96,421	415	0.004308	0.995692	96,213	6,986,002	0.004317	72.45
2	96,006	212	0.002213	0.997787	95,899	6,889,789	0.002216	71.76
3	95,793	146	0.001521	0.998479	95,720	6,793,890	0.001522	70.92
4	95,647	118	0.001233	0.998767	95,589	6,698,169	0.001234	70.03
5	95,530	89	0.000932	0.999068	95,485	6,602,581	0.000932	69.12
6	95,441	68	0.000712	0.999288	95,407	6,507,096	0.000712	68.18
7	95,373	53	0.000553	0.999447	95,346	6,411,689	0.000553	67.23
8	95,320	43	0.000454	0.999546	95,298	6,316,343	0.000454	66.26
9	95,277	39	0.000408	0.999592	95,257	6,221,045	0.000408	65.29
10	95,238	39	0.000407	0.999593	95,218	6,125,788	0.000407	64.32
11	95,199	42	0.000441	0.999559	95,178	6,030,569	0.000441	63.35
12	95,157	48	0.000500	0.999500	95,133	5,935,391	0.000500	62.37
13	95,109	55	0.000575	0.999425	95,082	5,840,258	0.000575	61.41
14	95,055	63	0.000665	0.999335	95,023	5,745,176	0.000665	60.44
15	94,991	73	0.000773	0.999227	94,955	5,650,153	0.000774	59.48
16	94,918	85	0.000899	0.999101	94,875	5,555,199	0.000900	58.53
17	94,833	98	0.001033	0.998967	94,784	5,460,323	0.001033	57.58
18	94,735	111	0.001168	0.998832	94,679	5,365,540	0.001169	56.64
19	94,624	123	0.001305	0.998695	94,562	5,270,860	0.001306	55.70
20	94,501	137	0.001449	0.998551	94,432	5,176,298	0.001450	54.78
21	94,364	150	0.001593	0.998407	94,288	5,081,866	0.001595	53.85
22	94,213	162	0.001718	0.998282	94,132	4,987,578	0.001720	52.94
23	94,051	171	0.001816	0.998184	93,966	4,893,445	0.001817	52.03
24	93,881	178	0.001892	0.998108	93,792	4,799,479	0.001894	51.12
25	93,703	184	0.001963	0.998037	93,611	4,705,687	0.001964	50.22
26	93,519	190	0.002036	0.997964	93,424	4,612,076	0.002039	49.32
27	93,329	197	0.002111	0.997889	93,230	4,518,653	0.002113	48.42
28	93,132	204	0.002188	0.997812	93,030	4,425,422	0.002190	47.52
29	92,928	211	0.002268	0.997732	92,823	4,332,393	0.002271	46.62
30	92,717	218	0.002351	0.997649	92,608	4,239,570	0.002354	45.73
31	92,499	225	0.002435	0.997565	92,386	4,146,962	0.002438	44.83
32	92,274	232	0.002518	0.997482	92,158	4,054,576	0.002521	43.94
33	92,042	239	0.002597	0.997403	91,922	3,962,418	0.002601	43.05
34	91,802	246	0.002678	0.997322	91,680	3,870,496	0.002682	42.16
35	91,557	253	0.002763	0.997237	91,430	3,778,816	0.002767	41.27
36	91,304	261	0.002861	0.997139	91,173	3,687,386	0.002865	40.39
37	91,042	271	0.002980	0.997020	90,907	3,596,213	0.002984	39.50
38	90,771	284	0.003127	0.996873	90,629	3,505,307	0.003132	38.62
39	90,487	298	0.003298	0.996702	90,338	3,414,677	0.003303	37.74
40	90,189	315	0.003488	0.996512	90,032	3,324,339	0.003494	36.86

Tabla de Mortalidad por Edad

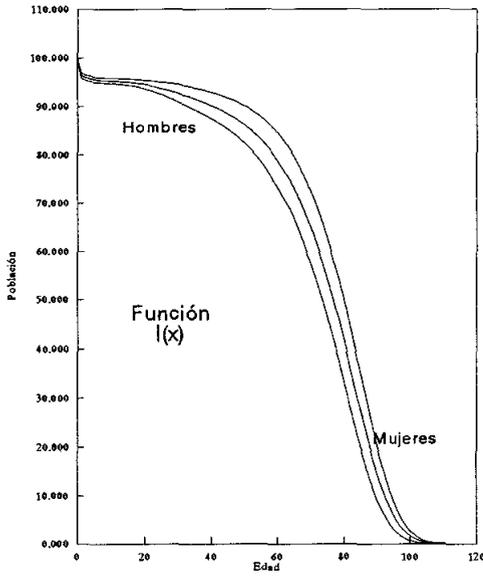
Total							México (1990-95)	
EDAD	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$	$p(x)$	$L(x)$	$T(x)$	$m(x)$	${}^e_0(x)$
41	89,874	332	0.003689	0.996311	89,708	3,234,308	0.003696	35.99
42	89,543	349	0.003898	0.996102	89,368	3,144,599	0.003905	35.12
43	89,194	367	0.004111	0.995889	89,010	3,055,231	0.004120	34.25
44	88,827	385	0.004334	0.995666	88,635	2,966,221	0.004344	33.39
45	88,442	405	0.004581	0.995419	88,239	2,877,586	0.004591	32.54
46	88,037	427	0.004854	0.995146	87,823	2,789,347	0.004866	31.68
47	87,610	451	0.005148	0.994852	87,384	2,701,524	0.005161	30.84
48	87,159	476	0.005461	0.994539	86,921	2,614,140	0.005476	29.99
49	86,683	503	0.005802	0.994198	86,431	2,527,219	0.005819	29.15
50	86,180	532	0.006170	0.993830	85,914	2,440,788	0.006189	28.32
51	85,648	564	0.006581	0.993419	85,366	2,354,874	0.006603	27.49
52	85,084	601	0.007058	0.992942	84,784	2,269,508	0.007083	26.67
53	84,484	643	0.007613	0.992387	84,162	2,184,724	0.007642	25.86
54	83,841	691	0.008240	0.991760	83,495	2,100,562	0.008275	25.05
55	83,150	743	0.008941	0.991059	82,778	2,017,067	0.008981	24.26
56	82,406	799	0.009691	0.990309	82,007	1,934,289	0.009738	23.47
57	81,608	854	0.010465	0.989535	81,181	1,852,282	0.010520	22.70
58	80,754	909	0.011252	0.988748	80,299	1,771,102	0.011315	21.93
59	79,845	964	0.012075	0.987925	79,363	1,690,802	0.012148	21.18
60	78,881	1,020	0.012933	0.987067	78,371	1,611,439	0.013017	20.43
61	77,861	1,082	0.013897	0.986103	77,320	1,533,069	0.013994	19.69
62	76,779	1,156	0.015061	0.984939	76,201	1,455,749	0.015176	18.96
63	75,622	1,247	0.016486	0.983514	74,999	1,379,548	0.016623	18.24
64	74,376	1,349	0.018133	0.981867	73,701	1,304,549	0.018299	17.54
65	73,027	1,457	0.019955	0.980045	72,298	1,230,848	0.020156	16.85
66	71,570	1,564	0.021856	0.978144	70,788	1,158,550	0.022097	16.19
67	70,006	1,664	0.023774	0.976226	69,173	1,087,762	0.024060	15.54
68	68,341	1,753	0.025655	0.974345	67,465	1,018,589	0.025988	14.90
69	66,588	1,835	0.027550	0.972450	65,671	951,124	0.027935	14.28
70	64,753	1,910	0.029501	0.970499	63,798	885,454	0.029943	13.67
71	62,843	1,990	0.031660	0.968340	61,848	821,655	0.032169	13.07
72	60,853	2,081	0.034190	0.965810	59,813	759,807	0.034785	12.49
73	58,773	2,188	0.037228	0.962772	57,679	699,994	0.037934	11.91
74	56,585	2,305	0.040734	0.959266	55,432	642,315	0.041581	11.35
75	54,280	2,420	0.044584	0.955416	53,070	586,882	0.045600	10.81
76	51,860	2,523	0.048651	0.951349	50,598	533,812	0.049864	10.29
77	49,337	2,612	0.052945	0.947055	48,031	483,214	0.054384	9.79
78	46,725	2,682	0.057408	0.942592	45,384	435,183	0.059104	9.31
79	44,042	2,735	0.062089	0.937911	42,675	389,800	0.064078	8.85
80	41,308	2,774	0.067158	0.932842	39,921	347,124	0.069492	8.40

Tabla de Mortalidad por Edad

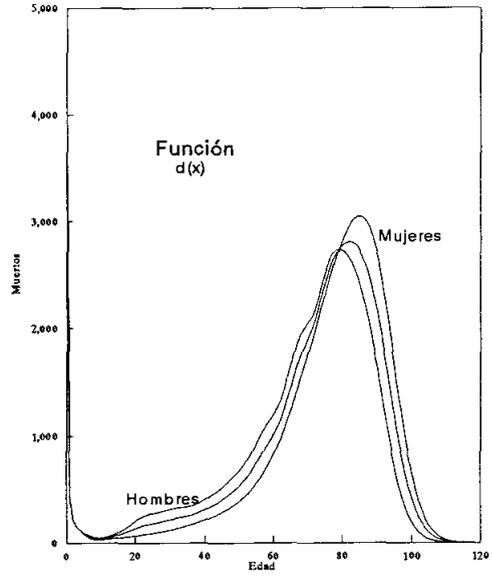
Total		México (1990-95)						
EDAD	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$	$p(x)$	$L(x)$	$T(x)$	$m(x)$	${}^0e(x)$
81	38,534	2,799	0.072640	0.927360	37,134	307,204	0.075378	7.97
82	35,735	2,808	0.078568	0.921432	34,331	270,069	0.081781	7.56
83	32,927	2,798	0.084979	0.915021	31,528	235,739	0.088750	7.16
84	30,129	2,769	0.091914	0.908086	28,744	204,211	0.096341	6.78
85	27,360	2,720	0.099414	0.900586	26,000	175,466	0.104614	6.41
86	24,640	2,649	0.107527	0.892473	23,315	149,467	0.113637	6.07
87	21,990	2,558	0.116305	0.883695	20,711	126,152	0.123486	5.74
88	19,433	2,445	0.125803	0.874197	18,210	105,440	0.134247	5.43
89	16,988	2,312	0.136081	0.863919	15,832	87,230	0.146016	5.13
90	14,676	2,151	0.146585	0.853415	13,601	71,398	0.158178	4.86
91	12,525	1,970	0.157282	0.842718	11,540	57,797	0.170707	4.61
92	10,555	1,775	0.168142	0.831858	9,668	46,257	0.183575	4.38
93	8,780	1,573	0.179134	0.820866	7,994	36,590	0.196757	4.17
94	7,207	1,371	0.190231	0.809769	6,522	28,596	0.210227	3.97
95	5,836	1,175	0.201409	0.798591	5,249	22,074	0.223963	3.78
96	4,661	991	0.212644	0.787356	4,165	16,825	0.237942	3.61
97	3,670	822	0.223914	0.776086	3,259	12,660	0.252143	3.45
98	2,848	670	0.235198	0.764802	2,513	9,401	0.266543	3.30
99	2,178	537	0.246478	0.753522	1,910	6,888	0.281124	3.16
100	1,641	423	0.257736	0.742264	1,430	4,978	0.295864	3.03
101	1,218	328	0.268954	0.731046	1,054	3,548	0.310742	2.91
102	891	249	0.280115	0.719885	766	2,494	0.325736	2.80
103	641	187	0.291201	0.708799	548	1,728	0.340826	2.70
104	454	137	0.302198	0.697802	386	1,180	0.355987	2.60
105	317	99	0.313089	0.686911	267	794	0.371198	2.51
106	218	71	0.323858	0.676142	183	527	0.386432	2.42
107	147	49	0.334490	0.665510	123	344	0.401666	2.34
108	98	34	0.344970	0.655030	81	222	0.416875	2.26
109	64	23	0.355285	0.644715	53	141	0.432032	2.19
110	41	15	0.365422	0.634578	34	88	0.447114	2.12
111	26	10	0.375367	0.624633	21	54	0.462095	2.06
112	16	6	0.385111	0.614889	13	33	0.476951	1.99
113	10	4	0.394643	0.605357	8	19	0.491658	1.93
114	6	2	0.403955	0.596045	5	11	0.506194	1.86
115	4	2	0.413037	0.586963	3	7	0.520538	1.79
116	2	1	0.421884	0.578116	2	4	0.534668	1.69
117	1	1	0.430491	0.569509	1	2	0.548567	1.57
118	1	0	0.438852	0.561148	1	1	0.562217	1.37
119	0	0	0.446964	0.553036	0	0	0.575601	1.05
120	0	0	0.000000	1.000000	0	0	0.000000	0.50

Gráficas de las Tablas de Mortalidad por Edad
(Hombres, Mujeres y Total)

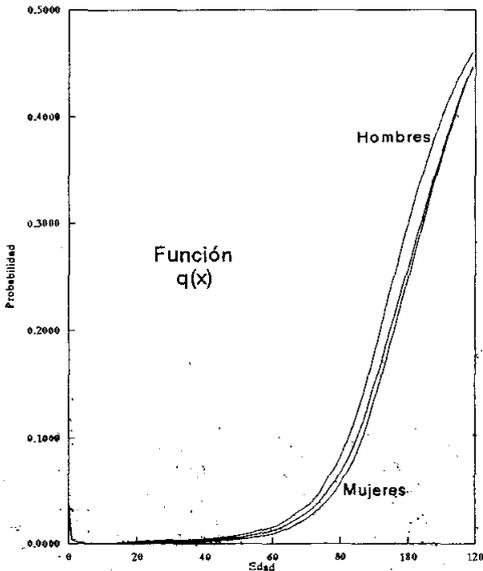
Gráfica-47



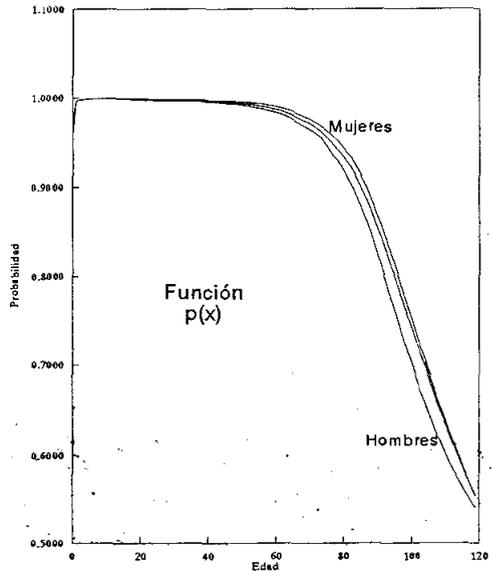
Gráfica-48



Gráfica-49

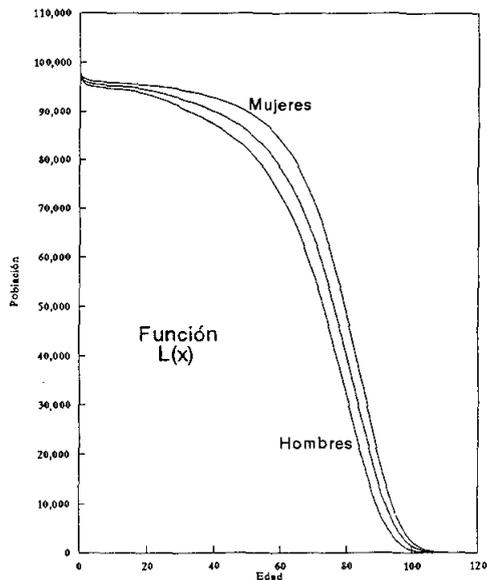


Gráfica-50

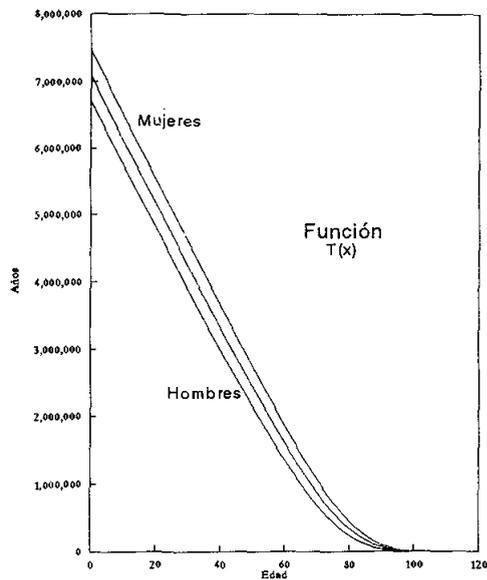


Gráficas de las Tablas de Mortalidad por Edad
(Hombres, Mujeres y Total)

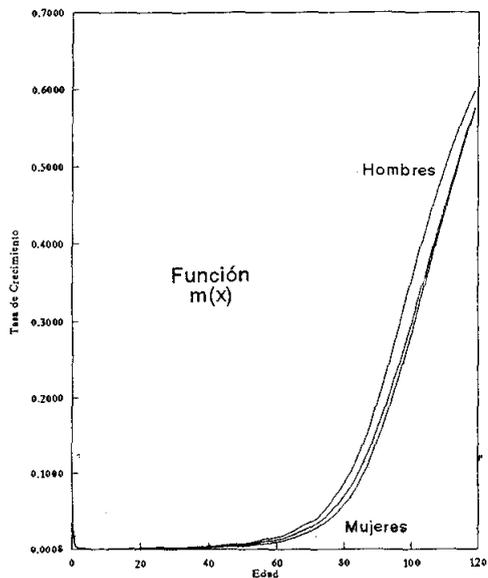
Gráfica-51



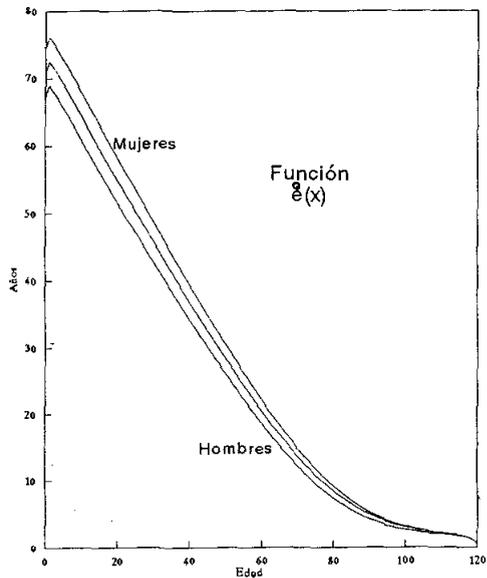
Gráfica-52



Gráfica-53



Gráfica-54



CONCLUSIONES

1.- A pesar de que el fenómeno de mortalidad ha sido estudiado desde hace bastante tiempo, aún no se ha logrado desarrollar una función matemática que por si sola sea capaz de describir su tendencia en el total del rango de vida. La consecuencia inmediata ha inducido la necesidad de un tratamiento por intervalos, especialmente en la sección que comprende cambios que alternan entre crecientes y decrecientes, esto es, en las edades infantiles, juveniles y parte de las medianas, ya que para el resto se presenta una monotonía en el crecimiento, con un cambio alrededor de las edades 85-90, cuando se considera la hipótesis *Gompertz Modificada*.

2.- Existen múltiples y diversas opciones para llevar a cabo una interpolación y extropolación de tablas quinquenales de mortalidad. A menudo es la división de intervalos un factor influyente. La decisión de adoptar este o aquel método para tratar cada intervalo puede llevar a combinaciones específicas.

3.- En los capítulos precedentes se ha tenido oportunidad de ilustrar diferentes métodos que bien podrían aplicarse a un mismo caso, sin embargo habrá que elegir sólo uno, el que ofrezca mejores resultados. En términos generales, se puede decir que la decisión de optar por este o aquel método se ve influenciada, en primera instancia, por el propósito para el cual se

empleará la tabla. No tendría sentido utilizar un proceso muy elaborado si el objetivo no lo justifica. La forma en la cual se dan los datos y sus características generales, así como su extensión permitirán ir concretando la elección, de igual forma la experiencia y conocimiento técnico darán la pauta para precisar la decisión.

4.- El grado de complejidad de las pruebas de ajuste aplicadas a una serie graduada deben ser congruentes con el tipo de graduación utilizada, naturalmente que el tipo de ajuste a su vez debe concordar con los propósitos para los cuales se elabora el trabajo.

Una serie ajustada incluye, antes de su aceptación, las pruebas de fidelidad y suavidad; los resultados que estas arrojen deberán encajar en el intervalo que el graduador esté dispuesto a tomar como confiable y apegado a sus objetivos.

5.- Cuando se realiza la extrapolación se tiene la inherente necesidad de elegir una hipótesis específica. En todos los casos siempre se tendrá una buena orientación analizando experiencias pasadas y detectando situaciones presentes. Quizá se adopte la hipótesis *Gompertz Modificada*, pero si la realidad trasluce que la esperanza de vida que resulta está muy lejos de ser verídica, entonces, tal vez la hipótesis de *Gompertz* sea la mejor opción y un atenuante del problema.

ANEXO A

A.1 DEFINICIONES BASICAS.

INTERPOLACION.

Proceso mediante el cual se pueden calcular los elementos intermedios entre los datos de una serie dada.

EXTRAPOLACION.

Dada una serie de datos observados, el procedimiento a través del cual se pueden determinar sus elementos, precedentes o posteriores, recibe el nombre de extrapolación.

POLINOMIO OSCULANTE.

Sean x_0, x_1, \dots, x_n , $n+1$ números distintos en el intervalo $[a, b]$ y m_i un entero no negativo asociado a x_i para $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Sean

$$m = \max_{0 \leq i \leq n} m_i \quad \text{y} \quad f \in C^m [a, b]$$

El polinomio osculante que aproxima a f es el polinomio P de menor grado tal que

$$\frac{d^k P(x_i)}{dx^k} = \frac{d^k f(x_i)}{dx^k}$$

para cada $i = 0, 1, \dots, n$ y $k = 0, 1, \dots, m_i$

AJUSTE.

Se llama ajuste a la operación que permite reemplazar una serie observada irregular por una serie regular refinada consistente con la tendencia de los valores observados.

En estadística suele llamarse suavizado de curvas, mientras que actuarialmente se denomina ajuste, graduación o perecuación.

DIFERENCIA ORDINARIA.

Las diferencias ordinarias del punto U_x toman en cuenta los valores de los puntos que le siguen. Así, dada una serie de datos U_x , que se corresponden con $x, x+h, x+2h, \dots$; la primera diferencia ordinaria de U_x se define como :

$$\Delta U_x = U_{x+h} - U_x$$

donde h representa la distancia que guardan los puntos entre sí.

La segunda diferencia ordinaria :

$$\Delta^2 U_x = \Delta(\Delta U_x) = U_{x+2h} - 2U_{x+h} - U_x$$

Análogamente, la n -ava diferencia :

$$\Delta^n U_x = \Delta(\Delta^{n-1} U_x)$$

DIFERENCIA CENTRAL.

Las diferencias centrales de un punto U_x se construyen tomando como base tanto los valores de los puntos precedentes como los de los posteriores. Las más usadas son las diferencias pares, así, la segunda diferencia central se define como :

$$\delta^2 U_x = U_{x+1} - 2U_x + U_{x-1}$$

Por otro lado, están íntimamente relacionadas con las diferencias ordinarias, lo que ha llevado a considerar dos expresiones básicas :

$$\delta^2 U_{x+h} = \Delta^2 U_x$$

$$\delta^4 U_{x+2h} = \Delta^4 U_x$$

donde h representa la distancia que guardan los puntos entre sí.

TASA INSTANTANEA DE MORTALIDAD.

La tasa instantánea de mortalidad o fuerza de mortalidad o intensidad es una función que se simboliza con la letra μ , y contiene como subíndice un indicador de la edad.

Se define, para cierta edad x , como la relación entre el total de muertes que debería haber en el año con respecto al número de personas que tienen exactamente edad x , considerando que el total de personas en observación es siempre el mismo, esto es, los individuos que mueren se reemplazan inmediatamente por otros de idéntica edad.

Se expresa, para la edad x , como:

$$\mu_x = \frac{-d \ln(l(x))}{dx}$$

que es el límite hacia el cual tiende ${}_{(1/t)}q_x$ cuando $(1/t)$ tiende a hacerse infinitamente pequeño.

POBLACION ESTABLE.

Es una población en donde la mortalidad, la natalidad y la tasa de variación son constantes.

Se dice que representan las poblaciones límite hacia las cuales tienden las poblaciones reales cuando la mortalidad y la fecundidad permanecen invariables.

POBLACION ESTACIONARIA.

Son un caso particular de las poblaciones estables, representan poblaciones para las cuales la tasa de crecimiento natural es cero.

El fenómeno de envejecimiento de la población se atribuye al descenso de la mortalidad.

A.2 RELACIONES ENTRE FUNCIONES BIOMETRICAS STANDARD.

$$l(x+1) = l(x) [1 - q(x)]$$

$$l(x+n) = l(x) p(x) \dots p(x+n-1)$$

$$l(x) = \sum_{t=0}^{w-1-x} d(x+t)$$

$$d(x) = l(x) - L(x+1)$$

$$d(x) = l(x) q(x)$$

$$L(x) \approx 1/2 [l(x) + l(x+1)]$$

$$L(x) \approx l(x) - 1/2 d(x)$$

$$L(x) \approx l(x+1) + 1/2 d(x)$$

$$L(x) = \int_0^1 l(x+t) dt$$

$$T(x) = \int_0^{\infty} l(x+t) dt$$

$$T(x) = L(x) + L(x+1) + \dots$$

$$T(x) = 1/2 l(x) + l(x+1) + \dots$$

$$m(x) = \frac{d(x)}{l(x)}$$

$$m(x) = 2 \frac{1-p(x)}{1+p(x)}$$

$$m(x) = \frac{q(x)}{1 - 1/2 q(x)}$$

$$q(x) = \frac{d(x)}{l(x)}$$

$$q(x) = 1 - p(x)$$

$$q(x) = \frac{m(x)}{1 + 1/2 m(x)}$$

$$p(x) = \frac{l(x+1)}{l(x)}$$

$$p(x) = 1 - q(x)$$

$$p(x) = \frac{2 - m(x)}{2 + m(x)}$$

$$p(x) = \frac{e(x)}{1 + e(x+1)}$$

$$p(x) = \frac{\dot{e}(x) - 1/2}{\dot{e}(x+1) + 1/2}$$

$$\dot{e}(x) = \frac{T(x)}{l(x)}$$

$$\dot{e}(x) = \int_0^{\infty} p(x, t) dt$$

$$\dot{e}(x) = \frac{L(x) + L(x+2) + \dots}{2 [L(x) - L(x+1) + \dots]}$$

$$e(x) = \dot{e}(x) - 1/2$$

$$e(x) = p(x) [1 + e(x+1)]$$

$$e(x) = \frac{l(x+1) + l(x+2) + \dots}{l(x)}$$

ANEXO B

B.1 FORMULA DE EVERETT.

La fórmula de Everett se deduce a partir de las fórmulas de Gauss para interpolar en intervalos iguales. De la fórmula "avanzada" con intervalo x y término inicial v_1 se puede escribir :

$$v_{x+1} = v_1 + x_{(1)} \Delta v_1 + x_{(2)} \Delta^2 v_0 + (x+1)_{(3)} \Delta^3 v_0 + (x+1)_{(4)} \Delta^4 v_{-1} + \\ + (x+2)_{(5)} \Delta^5 v_{-1} + \dots$$

La fórmula "anterior" de Gauss con intervalo $(x-1)$ y término inicial v_1 está dada como :

$$v_x = v_1 + (x-1)_{(1)} \Delta v_0 + x_{(2)} \Delta^2 v_0 + x_{(3)} \Delta^3 v_{-1} + (x+1)_{(4)} \Delta^4 v_{-1} + \\ + (x+1)_{(5)} \Delta^5 v_{-2} + \dots$$

Calculando $\Delta v_x = v_{x+1} - v_x$ se tiene :

$$\Delta v_x = x_{(1)} \Delta v_1 + (x+1)_{(3)} \Delta^3 v_0 + (x+2)_{(5)} \Delta^5 v_{-1} + \dots \\ - (x-1)_{(1)} \Delta v_0 - x_{(3)} \Delta^3 v_{-1} - (x+1)_{(5)} \Delta^5 v_{-2} + \dots$$

Sustituyendo $\Delta v_x, \Delta^2 v_x, \Delta^3 v_x, \dots$ por $u_x, \Delta u_x, \Delta^2 u_x, \dots$ se tiene :

$$u_x = x_{(1)} u_1 + (x+1)_{(3)} \Delta^2 u_0 + (x+2)_{(5)} \Delta^4 u_{-1} + \dots \\ - (x-1)_{(1)} u_0 - x_{(3)} \Delta^2 u_{-1} - (x+1)_{(5)} \Delta^4 u_{-2} - \dots - (1)$$

Cuando x es menor que la unidad, una expresión conveniente para interpolar en el intervalo u_0 y u_1 se determina sustituyendo los términos $1-x$ por λ , esto es,

$$U_x = xu_1 + \frac{x(x^2-1)}{3!} \Delta^2 u_0 + \frac{x(x^2-1)(x^4-4)}{5!} \Delta^4 u_{-1} + \dots$$

$$+ \lambda u_0 + \frac{\lambda(\lambda^2-1)}{3!} \Delta^2 u_{-1} + \frac{\lambda(\lambda^2-1)(\lambda^2-4)}{5!} \Delta^4 u_{-2} + \dots$$

Esta es la forma más común de la fórmula de Everett. Se usa para interpolar tanto en intervalos iguales como en desiguales, y está adaptada especialmente para su empleo en trabajos estadísticos.

ANEXO C

Tabla-C.1

Tabla quinquenal de mortalidad (Mujeres)

México (1990-95)

Edad	n	l(x)	d(x,n)	q(x,n)	P(x,x+5)	L(x,n)	T(x)	e(x)	m(x,n)
0	1	100,000	3,032	0.0303	0.9931	97,544	7,380,614	73.81	0.0311
1	4	96,968	888	0.0092		385,606	7,283,070	75.11	0.0023
5	5	96,080	240	0.0025	0.9978	479,799	6,897,464	71.79	0.0005
10	5	95,840	181	0.0019	0.9976	478,747	6,417,665	66.96	0.0004
15	5	95,658	278	0.0029	0.9966	477,599	5,938,918	62.08	0.0006
20	5	95,380	380	0.0040	0.9954	475,953	5,461,319	57.26	0.0008
25	5	95,000	499	0.0053	0.9938	473,756	4,985,366	52.48	0.0011
30	5	94,502	669	0.0071	0.9916	470,836	4,511,610	47.74	0.0014
35	5	93,833	913	0.0097	0.9886	466,881	4,040,774	43.06	0.0020
40	5	92,920	1,212	0.0130	0.9847	461,570	3,573,893	38.46	0.0026
45	5	91,708	1,622	0.0177	0.9787	454,486	3,112,323	33.94	0.0036
50	5	90,086	2,242	0.0249	0.9690	444,824	2,657,837	29.50	0.0050
55	5	87,843	3,269	0.0372	0.9524	431,046	2,213,013	25.19	0.0076
60	5	84,575	4,933	0.0583	0.9258	410,539	1,781,967	21.07	0.0120
65	5	79,642	7,246	0.0910	0.8870	380,092	1,371,428	17.22	0.0191
70	5	72,396	9,936	0.1373	0.8325	337,137	991,336	13.69	0.0295
75	5	62,459	12,654	0.2026		280,661	654,199	10.47	0.0451
80	w	49,805	49,805	1.0000	0.4284	373,538	373,538	7.50	0.1333
				P(75,w):	0.5710				

Información proporcionada por el Centro Latinoamericano de Demografía y Estadística (CELADE).

Tabla—C.2
 Coeficientes de Karup—King para interpolar en base
 a cuatro puntos.

COEFICIENTES DE KARUP—KING				
	m 1,S	m 2,S	m 3,S	m 4,S
Grupo superior				
0.0	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2	0.6560	0.5520	(0.2720)	0.0640
0.4	0.4080	0.8560	(0.3360)	0.0720
0.6	0.2320	0.9840	(0.2640)	0.0480
0.8	0.1040	1.0080	(0.1280)	0.0160
Grupos centrales				
0.0	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
0.2	(0.0640)	0.9120	0.1680	(0.0160)
0.4	(0.0720)	0.6960	0.4240	(0.0480)
0.6	(0.0480)	0.4240	0.6960	(0.0720)
0.8	(0.0160)	0.1680	0.9120	(0.0640)
Grupo inferior				
0.0	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
0.2	0.0160	(0.1280)	1.0080	0.1040
0.4	0.0480	(0.2640)	0.9840	0.2320
0.6	0.0720	(0.3360)	0.8560	0.4080
0.8	0.0640	(0.2720)	0.5520	0.6560

Expresión para calcular cada valor interpolado :

$$U_{x+s} = m_{1,S} U_{1,S} + m_{2,S} U_{2,S} + m_{3,S} U_{3,S} + m_{4,S} U_{4,S}$$

Tabla-C.3
Coeficientes para desagregar totales quinquenales.

COEFICIENTES DE KARUP-KING			
	m 1,s	m 2,s	m 3,s
Grupo superior			
0.0	0.3440	(0.2080)	0.0640
0.2	0.2480	(0.0560)	0.0080
0.4	0.1760	0.0480	(0.0240)
0.6	0.1280	0.1040	(0.0320)
0.8	0.1040	0.1120	(0.0160)
Grupos centrales			
0.0	0.0640	0.1520	(0.0160)
0.2	0.0080	0.2240	(0.0320)
0.4	(0.0240)	0.2480	(0.0240)
0.6	(0.0320)	0.2240	0.0080
0.8	(0.0160)	0.1520	0.0640
Grupo inferior			
0.0	(0.0160)	0.1120	0.1040
0.2	(0.0320)	0.1040	0.1280
0.4	(0.0240)	0.0480	0.1760
0.6	0.0080	(0.0560)	0.2480
0.8	0.0640	(0.2080)	0.3440

Tabla-C.4

MULTIPLICADORES DE BEERS					
	N 1, S	N 2, S	N 3, S	N 4, S	N 5, S
Primer grupo					
0	0.3333	(0.1636)	(0.0210)	0.0796	(0.0283)
1	0.2595	(0.0780)	0.0130	0.0100	(0.0045)
2	0.1924	0.0064	0.0184	(0.0256)	0.0084
3	0.1329	0.0844	0.0054	(0.0356)	0.0129
4	0.0819	0.1508	(0.0158)	(0.0284)	0.0115
Segundo grupo					
0	0.0404	0.2000	(0.0344)	(0.0128)	0.0068
1	0.0093	0.2268	(0.0402)	0.0028	0.0013
2	(0.0108)	0.2272	(0.0248)	0.0112	(0.0028)
3	(0.0198)	0.1992	0.0172	0.0072	(0.0038)
4	(0.0191)	0.1468	0.0822	(0.0084)	(0.0015)
Grupos Centrales					
0	(0.0117)	0.0804	0.1570	(0.0284)	0.0027
1	(0.0020)	0.0160	0.2200	(0.0400)	0.0060
2	0.0050	(0.0280)	0.2460	(0.0280)	0.0050
3	0.0060	(0.0400)	0.2200	0.0160	(0.0020)
4	0.0027	(0.0284)	0.1570	0.0804	(0.0117)
Penúltimo grupo					
0	(0.0015)	(0.0084)	0.0822	0.1468	(0.0191)
1	(0.0038)	0.0072	0.0172	0.1992	(0.0198)
2	(0.0028)	0.0112	(0.0248)	0.2272	(0.0108)
3	0.0013	0.0028	(0.0402)	0.2268	0.0093
4	0.0068	(0.0128)	(0.0344)	0.2000	0.0404
Ultimo grupo					
0	0.0115	(0.0284)	(0.0158)	0.1508	0.0819
1	0.0129	(0.0356)	0.0054	0.0844	0.1329
2	0.0084	(0.0256)	0.0184	0.0064	0.1924
3	(0.0045)	0.0100	0.0130	(0.0780)	0.2595
4	(0.0283)	0.0796	(0.0210)	(0.1636)	0.3333

Tabla-C.5

MULTIPLICADORES DE SPRAGUE					
	N 1, S	N 2, S	N 3, S	N 4, S	N 5, S
Primer grupo					
0	0.3616	(0.2768)	0.1488	(0.0336)	0.0000
1	0.2640	(0.0960)	0.0400	(0.0080)	0.0000
2	0.1840	0.0400	(0.0320)	0.0080	0.0000
3	0.1200	0.1360	(0.0720)	0.0160	0.0000
4	0.0704	0.1968	(0.0848)	0.0176	0.0000
Segundo grupo					
0	0.0336	0.2272	(0.0752)	0.0144	0.0000
1	0.0080	0.2320	(0.0480)	0.0080	0.0000
2	(0.0080)	0.2160	(0.0080)	0.0000	0.0000
3	(0.0160)	0.1840	0.0400	(0.0080)	0.0000
4	(0.0176)	0.1408	0.0912	(0.0144)	0.0000
Grupos Centrales					
0	(0.0128)	0.0848	0.1504	(0.0240)	0.0016
1	(0.0016)	0.0144	0.2224	(0.0416)	0.0064
2	0.0064	(0.0336)	0.2544	(0.0336)	0.0064
3	0.0064	(0.0416)	0.2224	0.0144	(0.0016)
4	0.0016	(0.0240)	0.1504	0.0848	(0.0128)
Penúltimo grupo					
0	0.0000	(0.0144)	0.0912	0.1408	(0.0176)
1	0.0000	(0.0080)	0.0400	0.1840	(0.0160)
2	0.0000	0.0000	(0.0080)	0.2160	(0.0080)
3	0.0000	0.0080	(0.0480)	0.2320	0.0080
4	0.0000	0.0144	(0.0752)	0.2272	0.0336
Ultimo grupo					
0	0.0000	0.0176	(0.0848)	0.1968	0.0704
1	0.0000	0.0160	(0.0720)	0.1360	0.1200
2	0.0000	0.0080	(0.0320)	0.0400	0.1840
3	0.0000	(0.0080)	0.0400	(0.0960)	0.2640
4	0.0000	(0.0336)	0.1488	(0.2768)	0.3616

Tabla-C.6

MULTIPLICADORES DE GREVILLE					
	N _{1,S}	N _{2,S}	N _{3,S}	N _{4,S}	N _{5,S}
Primer grupo					
0	0.3237	(0.1252)	(0.0786)	0.1180	(0.0379)
1	0.2586	(0.0744)	0.0076	0.0136	(0.0054)
2	0.1956	(0.0064)	0.0376	(0.0384)	0.0116
3	0.1370	0.0680	0.0300	(0.0520)	0.0170
4	0.0851	0.1380	0.0034	(0.0412)	0.0147
Segundo grupo					
0	0.0420	0.1936	(0.0248)	(0.0192)	0.0084
1	0.0094	0.2264	(0.0396)	0.0024	0.0014
2	(0.0114)	0.2296	(0.0284)	0.0136	(0.0034)
3	(0.0205)	0.2020	0.0130	0.0100	(0.0045)
4	(0.0195)	0.1484	0.0798	(0.0068)	(0.0019)
Grupos Centrales					
0	(0.0117)	0.0804	0.1570	(0.0284)	0.0027
1	(0.0019)	0.0156	0.2206	(0.0404)	0.0061
2	0.0048	(0.0272)	0.2448	(0.0272)	0.0048
3	0.0061	(0.0404)	0.2206	0.0156	(0.0019)
4	0.0027	(0.0284)	0.1570	0.0804	(0.0117)
Penúltimo grupo					
0	(0.0019)	(0.0068)	0.0798	0.1484	(0.0195)
1	(0.0045)	0.0100	0.0130	0.2020	(0.0205)
2	(0.0034)	0.0136	(0.0284)	0.2296	(0.0114)
3	0.0014	0.0024	(0.0396)	0.2264	0.0094
4	0.0084	(0.0192)	(0.0248)	0.1936	0.0420
Ultimo grupo					
0	0.0147	(0.0412)	0.0034	0.1380	0.0851
1	0.0170	(0.0520)	0.0300	0.0680	0.1370
2	0.0116	(0.0384)	0.0376	(0.0064)	0.1956
3	(0.0054)	0.0136	0.0076	(0.0744)	0.2586
4	(0.0379)	0.1180	(0.0786)	(0.1252)	0.3237

BIBLIOGRAFIA

Miller Morton D., S.B. Henry,
A.S. Charles, H.W. Hugh
Elements of Graduation.
Published by :
The Actuarial Society of America.
American Institute of Actuaries.

Henderson Robert.
Mathematical Theory of Graduation.
The Actuarial Society of America.

Freeman Harry, C.M.G., M.A., F.I.A.
Finite Differences for Actuarial
Students.
Cambridge.
Published for the Institute of
Actuaries at The University Press
1967.

Bayó Francisco R.
Mortality of the Aged.
Reprinted from the :
Transactions of the Society of
Actuaries.
Volume XXIV, Meeting No. 68.
March 1972.

González Galé José
Elementos de Cálculo Actuarial
Ediciones Macchi

Lasheras Sanz Antonio.
Matemáticas del Seguro.
Editorial Dossat, S.A.
Madrid-Buenos Aires.

Thullen Perter.
Métodos Estadísticos y Análisis de
Costos en la Seguridad Social.
CISS.

L. Burden Richard, J. Douglas
Faires.
Análisis Numérico.
Grupo Editorial Iberoamérica.

Bowers, Gerber, Hickman, Jones,
Nesbit (1986).
Actuarial Mathematics.
Society of Actuaries.

Gillman Loenard.
The Calculos of Finite Diferences
W.W. Norton L. Company Inc.

Comparison of Two Methodos of
constructing Abridget Life Tables
U.S. Departament of Health,
Education, Welfare
Public Health Service.
Serie 2, número 4.

Life Tables.
U.S. Departament of Health,
Education, Welfare
Piblic Health service.
Vital statistics of the U.S. 1973.
Volumen II, sección 5.

Bell Felicite C., H. Wade Alice,
A.S.A. Stephen C. Goss, A.S.A. U.S.
Life Tables for the United States
Social security Area 1900-2080.
Departament of Health and Human
Services Social Security
Administration Office of The
Actuary.
August 1992.

Chester Wallace Jordan, Jr.
Life Contingencies
Society of Actuaries Textbook
2da. edición.
Public by Society of Actuaries 1967.

Tablas abreviadas.
Tablas Abreviadas de Mortalidad.
Elaboradas por CELADE.

Tabla de la Población Mundial
(1993).
Population Reference Bureau Inc.
Washington D.C.

Apuntes
Diplomado en Valuaciones
Actuariales CIESS, 1993.

Apuntes
Seminario sobre Aspectos
Demográficos y financieros
de la Tercera Edad.
CIESS.

Apuntes sobre Multiplicadores
Aplicación de los multiplicadores de
Beers, Greville y Sprague.

OBSERVACIONES

Se agradecerá el envío de cualquier comentario, crítica o información que permita enriquecer el presente trabajo, a cualquiera de las siguientes direcciones:

Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS)
Unidad de Servicios Actuariales
María Cedillo Sánchez, o
Guillermo Daniel Cruz Reyes
Toledo No. 21, 7mo.piso,
Colonia Juarez, C.P. 06698,
México D.F.
Tel. 211-18-74

o bien a:

Guillermo Daniel Cruz Reyes
Calz. México Xochimilco,
Cjón. Huipulco, C.P. 14370,
México D.F.
Tel. 573-25-12 (Dom. particular).

La Secretaría General de la Conferencia Interamericana de Seguridad Social (CISS), por indicaciones de su Presidente, licenciado Genaro Borrego Estrada, se ha propuesto llevar a cabo un importante programa editorial para cumplir de mejor manera con sus finalidades fundamentales consistentes en recopilar y difundir los avances de la seguridad social.

La Conferencia concentra sus esfuerzos en la publicación de documentos cuyo propósito es lograr una seguridad social eficiente, ante las necesidades sociales, y procurar que su contenido sea de interés general y comprenda una extensa variedad de temas. Su programa editorial responde, por lo tanto, a las demandas constantes de las instituciones de seguridad social del continente, para contar con un mayor número de publicaciones en las que quede constancia y testimonio de los diferentes trabajos que realizan, y a la generación de documentos útiles a las instituciones por parte de los órganos de la CISS, las Subregiones y del Sistema de información de la Seguridad Social Americana. Se publican dos colecciones: monografías de seguridad social de los países representados en las CISS y libros especializados en temas de seguridad social. Queda a las instituciones el compromiso de acentuar su periodicidad mensual, su Revista Seguridad Social, bimestral, y el Atlas de la Seguridad Social Americana, dan respuesta a las mismas demandas institucionales.

La presente publicación forma parte de este programa integral de difusión editorial, que realiza la Secretaría General de la Conferencia Interamericana de Seguridad Social.